První písemka (19.03.2010)

V početních příkladech nezapomeňte **zapsat výsledek**. Příklady se snažte řešit obecně, nesnažte se správné řešení uhodnout. Můžete používat všechny věty probrané na přednášce nebo cvičení. Přeji hodně štěstí ...

Příklad 1: Spočítejte determinant těchto matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{C}^T$ a jejich inverzí $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ a $\mathbf{C}^{-1}$ (pokud existují):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2: Spočítejte determinanty matic $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ (s parametrem t) a $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3: Spočítejte determinanty matice $n \times n$:

$$\mathbf{K}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4: Vypočtěte determinant matice $\mathbf{M}$ s funkcemi, výsledek co nejvíc zjednodušte:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \cos y & \sin x \sin y \\ \sin x & \cos x \cos y & -\cos x \sin y \\ 0 & \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

Příklad 5: Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení, svůj závěr zdůvodněte důkazem nebo protipříkladem.

a) Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou identické matice s výjimkou levého horního rohu, pro který $b_{1,1} = 2a_{1,1}$. Potom $\det \mathbf{B} = 2 \det \mathbf{A}$.

b) Pokud matice $\mathbf{A}$ je invertovatelná a matice $\mathbf{B}$ je singulární, potom $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je invertovatelná.

c) Pokud matice $\mathbf{A}$ je invertovatelná a matice $\mathbf{B}$ je singulární, potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je singulární.

Příklad 6: Rotace v trojrozměrném prostoru podle základních os x, y a z jsou určeny maticemi

$$\mathbf{R}_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{a}$$

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S využitím determinantu (vzpomeňte si na jeho vztah k obsahům) potvrďte, nebo vyvraťte, že rotace o libovolný úhel nemění objem libovolného tělesa.

Jako bonus: Zkuste objevit překvapivou souvislost se čtvrtým příkladem.

Příklad 7: Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ a $\mathbf{0}$ (matice plná nul) jsou čtvercové matice $n \times n$. Uvažte determinanty blokových matic (prvky jednotlivých matic naskládáme vedle sebe). Dokažte, že platí

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B},$$

ale obecně neplatí

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} - \det \mathbf{C} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Příklad 8: Za hvězdičku: Která z ekvivalentních definic determinantu (vzorečkem, vlastnostmi, přes objemy) se vám líbí nejvíce? Proč?