Příklady ke cvičení (30.04.2010)

Příklad 1: V rovině platí, že dvě přímky jsou kolmé, právě když součin jejich směrnic je -1. Dokažte to s použitím skalárního součinu.

Příklad 2: Nalezněte přímku kolmou na rovinu v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem určenou vektory $\mathbf{u} = (1, 1, 2)^T$ a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$.

Příklad 3: Nalezněte soustavu rovnic, jejímž řesením budou právě lineární kombinace $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z předchozího příkladu.

Příklad 4: Dokažte, že vektory $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ jsou na sebe kolmé, právě když $||x|| = ||y||$.

Příklad 5: Dokažte, že každá horní trojúhelníková ortogonální matice je diagonální.

Příklad 6: Pomocí Gram-Schmidtovy nalezněte ortonormální bázi sloupcového prostoru následujících matic.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozšiřte ortogonální báze na ortogonální báze celého $\mathbb{R}^4$.

Příklad 7: Skalární součin na prostoru funkcí se definuje

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x,$$

což odpovídá "nekonečnému" standartnímu skalárnímu součinu.

Uvažme funkce $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$, pro různé hodnoty $n \in \mathbb{R}$, na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Spočítejte skalární součiny:

$$\langle \sin(nx) | \sin(mx) \rangle, \quad \langle \sin(nx) | \cos(mx) \rangle, \quad \langle \cos(nx) | \cos(mx) \rangle \quad \forall n, m \in \mathbb{R}.$$

Příklad 8: Nalezněte koeficienty Fourierovy řady pro funkci f na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi\rangle \,, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x \in \langle -\pi, 0) \,. \end{cases}$$