Matematická analýza – cvičení 6.10.2010

Funkce

Úloha 1. Nakreslete grafy následujících funkcí, navíc u funkcí určete paritu, periodu, ...:
a) $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(2x+\pi)$, $2\cos x + 1$,
b) $\big||x-1|-1\big|$, $\big||x-1|-1\big|^2$, $\big||x-1|^2-1\big|$,
c) $\sin|x|$, $|\sin x|$,
d) (skládání funkcí – grafy kreslete jenom zhruba!) $\sin(x^2)$, $(\sin x)^2$, $\sin 1/x$, $\ln\sin x$, $\ln\ln\sin x$,
e) $\sqrt{1-x^2}$,
f) $\sin x \cdot \cos x$,
g) $x + 1/x$.

Úloha 2. Nalezněte následující funkce:
a) Funkce, která zobrazují interval $(0,1)$ na interval $(0,\infty)$ a na interval $(-\infty,\infty)$.
b) Funkci, která zobrazuje interval $(0,\infty)$ na interval $(0,1)$.

Úloha 3. Funkce f je zadána předpisem:

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}.$$

Určete definiční obor D_f, inverzní funkci f^{-1} a obor hodnot H_f.

Úpravy výrazů

Úloha 4. Vyřešte v oboru reálných čísel
a) $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{x^2+x-6}$,
b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 1$ (*Hint:* použijte substituci),
c) $\big||x-2|-3\big| = 5$.

Úloha 5. (AG-nerovnost) Pro kladná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

a) Dokažte pro $n = 2$ a zapamatujte si pro všechna přirozená n.
b) Můžete vyzkoušet dokázat pro obecné n.
Hint: Využívá se netypická indukce z $n \to 2n$ a $n \to n-1$. K tomu se bude hodit tvrzení pro $n = 2$.

Úloha 6. (Trojúhelníková nerovnost) Buď $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $|x+y| \leq |x| + |y|$.
Speciálně: Pokud $\varepsilon > 0$ a $x, y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tak $x + y \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$.
Na zamyšlení: Jak je to s $x \cdot y$ a $\frac{x}{y}$?

Matematická indukce

Úloha 7. Pokud pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n < a_{n+1}$, tak pro každé $m < n$ platí $a_m < a_n$. *Poznámka:* Toto jsou dvě rozdílné definice rostoucí posloupnosti.

Úloha 8. Dokažte správnost těchto součtů:
a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,
b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,
c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Úloha 9. Fermatovo n-té číslo je definováno jako $F_n = 2^{2^n} + 1$, tedy několik prvních z nich je: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, ... Odvoďte pro ně následující rekurentní vztah:

$$F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

Úloha 10. Pro $n \geq 4$ platí $2^n \geq n^2$, zkuste to i bez indukce, možná až pro trochu větší n. *Hint:* využijte binomickou větu.

Úloha 11. Podobně, také bez indukce, dokažte: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (pro $x > 0$) a $(1+x)^n \gg n^k$ (pro $x > 0$, k přirozené, a pro dostatečně velká n).

Logika

Tohle byste měli umět, ale netýká se to přímo analýzy. Pokud máte s takovými úkoly problémy, zkuste předmět “Matematické dovednosti”.

Úloha 12. Pro libovolné výroky a, b jsou následující výroky ekvivalentní. Připomeňte si napřed pravdivostní tabulky logických spojek – nebo se zeptejte, pokud nevíte oč jde. Rozmyslete si a dobře zapamatujte, při chápání důkazů se vám to bude hodit!
a) $a \Longrightarrow b$,
b) $\neg b \Longrightarrow \neg a$,
c) $\neg a \vee b$,
d) $\neg(a \wedge \neg b)$.

Úloha 13. Řekněte bez použití “implikace”:
a) Nebude-li pršet, nezmoknem.
b) Kdo se bude snažit, dostane zápočet.
c) Kdo získá dost bodů z písemky, dostane zápočet.
d) Kdo nebude nic umět a nebude se snažit, ten nedostane zápočet.

Úloha 14. Znegujte výroky:
a) Když prší, nevycházím z domu.
b) Nebude-li pršet, nezmoknem.
c) Zmokneme, právě když bude pršet.

Úloha 15. Zapište pomocí kvantifikátorů a znegujte:
a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.
b) Každé prvočíslo je liché.
c) Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.
d) Mezi n a $2n$ vždy najdeme nějaké prvočíslo.

Čtení výroků

Úloha 16. Rozhodněte, zda platí následující výroky, nebo jejich negace:
a) $\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + y^2 > 0$,
b) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ x < n$,
c) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ (x \geq n) \wedge (x < n+1)$,
d) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ \big(|x-2| < \delta \Longrightarrow |x-3| < \varepsilon\big)$.

Úloha 17. Vyhovuje funkce daná předpisem $f(x) = \sin x$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ x > K \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Úloha 18. Který z následujících výroků je silnější? Říkáme, že výrok A je silnější než výrok B, pokud z platnosti A můžeme usoudit, že také B platí.

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists K > 0 \ : \ |f(x+1) - f(x)| \leq K, \quad \text{nebo} \quad \exists K > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x+1) - f(x)| \leq K?$$

Něco zajímavějšího na závěr

Nechť A a B jsou dvě množiny. Řekneme, že množina A je nejvýše tak velká jako B ($A \preceq B$), pokud existuje proste zobrazení z A do B. Množiny A a B jsou stejně velké ($A \simeq B$), pokud mezi nimi existuje bijekce (tedy je možné jejich prvky spárovat).

Úloha 19. Porovnejte velikosti následujících množin: $\mathbb{P}$ (množina všech prvočísel), $\mathbb{N}$ (přirozená čísla), $\mathbb{Z}$ (celá čísla), $\mathbb{Q}$ (racionální čísla), $\mathbb{R}$ (reálná čísla), $\mathbb{C}$ (komplexní čísla).

Úloha 20. Která z těchto podmnožin roviny je větší? Úsečka délky jedna, nebo čtverec o straně jedna (včetně vnitřních bodů).

Úloha 21. Dokažte Cantor-Bernsteinovu větu, která říká, že $A \simeq B$, právě když $A \preceq B$ a $A \succeq B$.