Matematická analýza – cvičení 3.11.2010

Úloha 1. Spočtěte podíl dvou polynomů:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Limity posloupností – věta o policajtech

Úloha 2. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti. Nechť navíc platí, že $a_n \le b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.[1] Pokud $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, co to říká o $\lim_{n\to\infty} a_n$? Co říká věta o policistech?

Úloha 3. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \text{ kde } a \ge 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} nq^n, \text{ kde } q > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1}{b^n + b^{n-1} + \cdots + b + 1}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R},\ |a|, |b| < 1, \qquad \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n + \gamma^n}, \text{ kde } \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Úloha 4. Mějme reálná čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a $\beta_1, \dots, \beta_k$ splňující $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > 0$ a $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_k > 0$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_k^n}{\beta_1^n + \beta_2^n + \cdots + \beta_k^n}.$$

Odhady faktoriálu

Funkce faktoriál se definuje následujícím rekurzivním vztahem:

$$0! = 1, \qquad n! = n \cdot (n-1)!, \qquad \text{tedy } n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Pokusíme se srovnat, jak rychle roste $n!$ ve srovnání s dalšími funkcemi.

Úloha 5. Dokažte, že platí $n^{\frac{n}{2}} \le n! \le n^n$.

Výše uvedené odhady nejsou nic extra, ale v mnoha případech budou stačit. V případě potřeby lze použít přesnější odhady

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

které vyplývají ze vztahu $\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k$. Jako perličku poznamenejme, že existuje velice přesná Stirlingova aproximace

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = S_n,$$

pro kterou platí, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{S_n} = 1$.

Úloha 6. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(3n)!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}.$$

Složitější na závěr

Úloha 7. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

---

[1] Formálně: Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n \le b_n$.