Matematická analýza – cvičení 10.11.2010

Úloha 1. Spočtěte v závislosti na parametrech $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}.$$

Úloha 2. Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která obsahuje nekonečně mnoho nezáporných a nekladných členů.[1] Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje, právě když $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Navíc pokud $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje, je vždy rovna nule.

Úloha 3. Spočtěte další limity rozdílu odmocnin:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-3}, \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big), \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}\big(\sqrt{n^2+1} - n\big),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right).$$

Úloha 4. Dalších pár limit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i}{n} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!}.$$

Úloha 5. Dokažte, že jestliže $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných čísel s kladnou limitou A, potom pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Úloha 6. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}.$$

Můžete využít fakt, že $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e = 2.71\ldots$.

Úloha 7. Dokažte, že součin $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

Úloha 8. Čemu se rovná

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)?$$

Úloha 9. Mějme čísla $a_0, a_1, \ldots, a_k$, pro která platí $\sum_{i=0}^{k} a_i = 0$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i \sqrt{n+i} = \lim_{n\to\infty} a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_k\sqrt{n+k} = 0.$$

Úloha 10. Pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{n\to\infty} \sin nx$? Totéž pro $\lim_{n\to\infty} \cos nx$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou posloupnosti $\sin nx$ a $\cos nx$ prosté, tedy neexistují $n_1 \neq n_2$, že by $\sin n_1 x = \sin n_2 x$, resp. $\cos n_1 x = \cos n_2 x$? Můžete předpokládat, že π je iracionální.

---

[1] To formálně říká, že pro každé n_0 existují $n, n' > n_0$ takové, že $a_n \le 0$ a $a_{n'} \ge 0$.