

## Matematická analýza – cvičení 18.11.2010

**Úloha 1.** Nalezněte limity rekurentně zadaných posloupností. Nezapomeňte si rozmyslet, zda limity vůbec existují!

$$a_1 = 10 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, \quad b_1 = \sqrt{2} \quad \text{a} \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n},$$

$$c_1 = t, \text{ kde } t > 0 \quad \text{a} \quad c_{n+1} = \frac{c_n + \frac{2}{c_n}}{2}, \quad d_1 = 1 \quad \text{a} \quad d_{n+1} = \frac{1}{1 + d_n},$$

$$e_1 = t, \text{ kde } t \in [1, \infty) \quad \text{a} \quad e_{n+1} = \frac{5e_n - 3}{e_n + 1}, \quad f_1 = \sqrt{2} \quad \text{a} \quad f_{n+1} = \sqrt{2 - f_n},$$

$$g_1 = 0, \quad \text{a} \quad g_{n+1} = g_n + \frac{(x - g_n)^2}{2}, \text{ kde } 0 \leq x \leq 1, \quad h_1 = 0.4 \quad \text{a} \quad h_{n+1} = 4h_n \cdot (1 - h_n).$$

**Úloha 2.** Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení, tedy buď tvrzení dokažte, nebo nalezněte protipříklad:

- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , právě když  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , právě když  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = A$  pro každou rostoucí posloupnost přirozených čísel  $b_n$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , právě když  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = A$  pro každou neklesající posloupnost přirozených čísel  $b_n$ .

**Úloha 3.** Ještě pár limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2)}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{2n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right).$$