Matematická analýza – cvičení 1.12.2010

Úloha 1. Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k2^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{k^2}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos k}{2+\cos k}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

Úloha 2. Vyšetřete konvergenci řad s parametrem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{2^k}, \text{ kde } \alpha > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right), \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Úloha 3. Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $a_k > 0$, platí, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ konverguje, diverguje nebo nelze jednoznačně určit? Co když $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ naopak diverguje?

Úloha 4. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ následující veledůležité řady konvergují:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{6!} + \cdots.$$

Úloha 5. Zjistěte, zda následující řady konvergují absolutně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sin k$$

Něco zajímavějšího na závěr:

Úloha 6. Vymyslete, proč funguje podílové a odmocninové kritérium? S jakou řadou vyšetřovanou řadu srovnáváme?

Úloha 7. Dokažte, že pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a $a_k \geq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, také řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a}_k}{k}$$

konverguje.

Úloha 8. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, $a_k > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nechť $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) Dokažte, že také řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ diverguje.

b) Dokažte, že pro libovolné $k, N \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

a vyvoďte, že i řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ diverguje.

c) Dokažte, že pro libovolné $k \in en$ platí

$$\frac{a_k}{s_k^2} \leq \frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k}$$

a vyvoďte, že naopak řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ konverguje.

d) Lze něco říct o konvergenci řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+ka_k} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2a_k}?$$