

Matematická analýza – cvičení 14.12.2010

Spojité funkce se při vyšetřování limit chovají hezky. Víme, že následující funkce jsou spojité:

$$x^n, \quad \sqrt[n]{x}, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad e^x, \quad \log x.$$

Dále známe následující limity, zapamatujte si je nebo někam napište:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Při počítání limit bychom měli postupovat podobně jako u limit posloupností. Nejprve tam zkusit dosadit a v případě neurčitosti výrazu se pokusit příklad zjednodušit.

Úloha 1. Spočtěte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x + 14}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 7x + 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x^3 - 7x}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \end{aligned}$$

Úloha 2. Spočtěte limity v závislosti na parametrech:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \text{ kde } n, m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \text{ kde } n \in \mathbb{N}.$$

Úloha 3. Chytrou úpravou vypočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

Hint: Zkuste k čitateli a jmenovateli přičíst nulu ve vhodné formě $k - k$.

Úloha 4. Spočtěte limity rozdílů odmocnin:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

Úloha 5. S užitím $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$ vyřešte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x \cos x}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Úloha 6. Zjistěte, kde jsou následující funkce definované:

$$f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^2 + 3x + 2}, \quad g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x}.$$

Je možné funkce f a g v bodech nespojitosti spojitě dodefinovat?