Matematická analýza 2 – cvičení 16.5.2011

Lokální a globální extrémy

Jak souvisí lokální a globální extrémy s gradientem? Jak pomocí druhých derivací otestujeme, zda se v daném bodě nachází extrém?

Úloha 1. Nalezněte lokální a globální extrémy funkcí:

$$f_1(x,y) = x^2 + (y-1)^2, \qquad f_2(x,y) = x^2 - (y-1)^2, \qquad f_3(x,y) = x^3 + (y-1)^3,$$

$$f_4(x,y) = (x-y+1)^2, \qquad f_5(x,y) = (x-y+1)^3, \qquad f_6(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2,$$

$$f_7(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, x, y > 0, \qquad f_8(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$f_9(x,y) = \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, a^2+b^2+c^2 = 0, \qquad f_{10}(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2,$$

$$f_{11}(x,y) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z), x, y, z \in [0,\pi].$$

Lagrangeovy multiplikátory

Lagrengeovy multiplikátory se používají, pokud chceme nálezt extrémy na hranice množiny, kde hranice je dána rovnici $F(\vec{x}) = 0$ (nebo soustavou rovnic). Za každou rovnici $F_i(\vec{x}) = 0$ zavedeme novou proměnnou λ_i, Lagrangeův multiplikátor. Uvážíme funkci:

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \sum \lambda_i F_i(\vec{x}).$$

Pokud má funkce na hranici lokální extrém v bodě $\vec{x}$, potom $\nabla L(\vec{x}) = 0$.

Tím nalezneme kandidáta na extrém. Abychom zjistili, jestli to extrém skutečně je, použijeme upravenou Hesseho větu. Uvážíme matici druhých derivací (pouze pro proměnné $\vec{x}$). Extrém dostaneme, pokud je matice pozitivně nebo negativně definitní. Pokud je indefinitní, není extrém. Jinak nevíme nic. Pozor! Definitnost vyšetřujeme pouze vůči podprostoru tečnému na všechny $F_i(\vec{x})$ v daném bodě, tedy vůči podprostoru:

$$TH_a = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle \nabla F_i, x\rangle = 0 \forall i\}.$$

Úloha 2. Vyšetřete extrémy funkcí na množinách:

$f(x,y) = x + 2y$ na množině, kde $x^2 + y^2 = 1$.

$f(x,y,z) = x + y + z$ na množině, kde $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ na množině, kde $x^2 + y^2 \leq 1$.

$f(x,y) = x^2 - y^2 + z^2$ na rovině $2x - y - 3 = 0$.

$f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 4y$ na čtverci s vrcholy $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ a $(1,1)$.

Úloha 3. Vyřešte:

a) Který obdélník o obvodu l má největší obsah?
b) Který kvádr o objemu V má nejmenší povrch?
c) Který kvádr bez víka o objemu V má nejmenší povrch?
d) Který válec o objemu V má nejmenší povrch?
e) Jak velkého sněhuláka (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr?

Věta o implicitní funkci

Co říká věta o implicitní funkci?

Úloha 4. Rozhodněte, zda dané rovnice definují na okolí daného bodu hladkou funkci (nebo funkce) a pokud ano, určete hodnoty derivací:

a) Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ a libovolný bod splňující ji, nalezněte hladkou funkci $y(x) = y$.
b) Rovnice $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$ a bod $(1,-2,1)$, nalezněte hladkou funkci $z(x,y) = z$.
c) Rovnice

$$x + y - \sin z = 0 \qquad \text{a} \qquad -x - y^3 + e^z - 1 = 0$$

a bod $(0,0,0)$. Nalezněte hladké funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$.