

Matematická analýza 2 – cvičení 7.3.2011

Věty o substituci

Věty o substituci umožňují řešit komplikovanější integrály. Existují dvě věty o substituci.

Věta. Mějme funkce $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ a $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α, β) vlastní derivaci.

(1) Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) . Pak na intervalu (α, β) platí:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)).$$

(2) Nechť navíc φ má buď všude kladnou, nebo všude zápornou derivaci, tedy speciálně je prostá a existuje k ní funkce inverzní. Nechť $G(t)$ je primitivní funkce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (a, b) . Pak na intervalu (a, b) platí:

$$\int f(t) dt = G(\varphi^{-1}(t)).$$

Úloha 1. Zopakujte si věty o substituci. S jejich použitím vyřešte:

$$\begin{aligned} \int \sin(2x+7) dx, \quad \int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx, \quad \int \frac{1}{x} \sin(\log x) dx, \quad \int \frac{1}{x^2+4} dx, \\ \int \sqrt[3]{1-3x} dx, \quad \int \sin^7 x \cos x dx, \quad \int x e^{-x^2} dx, \quad \int \tan x dx, \quad \int \cotg x dx, \\ \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx, \quad \int \frac{x}{1+x^4} dx, \quad \int \frac{x^2}{\cos x^3} dx, \quad \int \frac{1}{x \ln x} dx, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

Úloha 2. Nechť $f(x)$ je funkce, která má vlastní derivace na uvažovaném intervalu. Vyřešte obecně:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Úloha 3. Obtížnější příklady na závěr:

$$\int \sqrt{1-\sin x} dx, \quad \int \sin^{2k+1} x dx, \quad \int \cos^{2k+1} x dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos x} dx.$$

Metoda per partes

Pamatujete na derivaci součinu? Z ní lze odvodit následující vztah:

Věta. Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na intervalu (a, b) . Potom na tomto intervalu platí:

$$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx.$$

Úloha 4. Vypočtěte integrály:

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx, \quad \int \ln x dx, \quad \int x^2 e^x dx, \quad \int x^k e^x dx, \quad \int \arcsin dx, \quad \int \operatorname{arctg} dx, \\ \int e^x \cos x dx, \quad \int e^{ax} \cos bx dx, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}, \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^k} dx. \end{aligned}$$