Matematická analýza 2 – cvičení 28.3.2011

Eulerova substituce

Pro integrály tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$$

volíme následující Eulerovy substituce. Povšimněte si, že vždy nastane alespoň jedna z následujících možností.

(i) Pokud má ax^2+bx+c dva stejné reálné kořeny, výraz odmocníme a nic nemusíme řešit.

(ii) Pokud má ax^2+bx+c dva různé reálné kořeny, volíme substituci

$$y = \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}.$$

(iii) Pro $a>0$ volíme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + y.$

(iv) Pokud je $c>0$, můžeme zvolit substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = xy + \sqrt{c}.$

(v) Pokud je současně $a>0$ a $c>0$, můžeme použít libovolnou z (iii) a (iv).

Úloha 1. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}, \qquad \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x.$$

Substituce trigonometrických funkcích

Budeme se zabývat integrály tvaru

$$\int R(\sin x, \cos x).$$

Úloha 2. (Intermezzo o paritě funkcí) Mějme funkce f a g. Jakou paritu má $1/f$, $f+g$ a $f\cdot g$ v závislosti na paritách f a g? Jak poznáme paritu polynomu? Jak poznáme paritu racionální funkce?

Pokud je racionální funkce lichá v sinu, použijeme substituci $y=\cos x$. Pokud je racionální funkce lichá v cosinu, použijeme substituci $y=\sin x$. Pokud je sudá v obou proměnných, použijeme substituci $y=\tan x$. Nejobecnější substituce je $y=\tan\frac{x}{2}$, která zafunguje vždy, ale vede na komplikované výpočty a proto se snažíme vždy použít některou z jiných substitucí. Tedy ještě jednou:

$$\begin{gathered} R(-u,v) = -R(u,v) \Longrightarrow y=\cos x, \\ R(u,-v) = -R(u,v) \Longrightarrow y=\sin x, \\ R(-u,v) = R(u,v) = R(u,-v) \Longrightarrow y=\tan x, \\ \text{jinak} \Longrightarrow y = \tan\frac{x}{2}, \end{gathered}$$

Vždy používáme druhou substituci, proto výsledek dostaneme jenom na intervalech délky π nebo $\frac{\pi}{2}$ a musíme výsledek dolepit!

Úloha 3. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x\cos x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x},$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad \int \tan^5 x\,\mathrm{d}x, \quad \int \tan^6 x\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4. Pár zajímavějších substitucí na závěr:

$$\int \sin\log x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$