Diskrétní matematika: série 3 – Kombinační čísla, relace a zobrazení

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. V politické straně, ve které je šedesát politiků, chtějí zvolit předsedu a tři místopředsedy. Kolika způsoby lze takovou volbu provést? Každý politik může zastávat jenom jednu funkci a místopředsedy považujeme za nerozlišitelné. Výsledek není potřeba upravovat, konkrétní číselné hodnoty rozhodně nejsou zajímavé. *(2 body)*

Úloha 2. Uvažme kombinační čísla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$, tedy všechna čísla na řádku Pascalova trojúhelníku. Které z nich je největší? *(3 body)*

Úloha 3. V této úloze budeme uvažovat počet možností, jak lze přirozené číslo n napsat jako součet několika přirozených čísel.

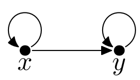
a) Spočtěte, kolika způsoby lze napsat přirozené číslo n jako součet k přirozených čísel (rozdílných od nuly).
Například: Pro $n = 3$ a $k = 2$ jsou dvě možnosti: $3 = 1 + 2 = 2 + 1$. *(2 body)*

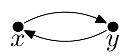
b) Podobně jako v a), ale tentokrát mohou být přirozená čísla i rovné nule.
Například: Pro $n = 3$ a $k = 2$ máme už čtyři možnosti: $3 = 0 + 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3 + 0$. *(2 body)*

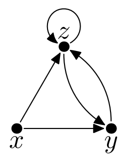
c) Spočtěte, kolika způsoby lze napsat přirozené číslo n jako součet libovolného počtu přirozených čísel (rozdílných od nuly).
Například: Pro $n = 3$ máme opět čtyři možnosti: $3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2 = 3$. *(3 body)*

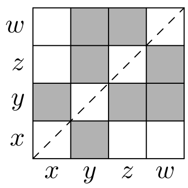
Úloha 4. Pro následující relace rozhodněte, zda jsou reflexivní, antireflexivní, symmetrické a tranzitivní:

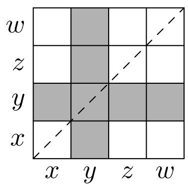
a) 

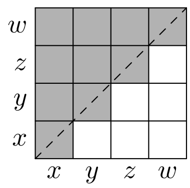
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

(po 0.5 bodu)

h) $H = (\mathbb{R}, \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1\})$. *(0.5 bodu)*

i) $I = (\mathbb{R}, \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3y^2 \leq 1\})$. *(0.5 bodu)*

j) $J = (\mathbb{R}, \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq y\})$. *(0.5 bodu)*

k) Mějme libovolnou množinu koček K. Na nich definujeme relaci R tak, že $\forall x, y \in K$, $(x, y) \in R$, právě když x syčí alespoň tak hlasitě jako y a zároveň x má alespoň tak dlouhý ocas jako y. Rozhodněte, které vlastnosti tato relace splňuje, nezávisle na tom, jak vypadá množina koček. *(2 body)*

Úloha 5. Spočtěte počet symetrických relací, reflexivních relací a symetrických a zároveň reflexivních relací na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$. *(3 body).*

Úloha 6. Mějme relaci R na množině X. Definujme $R^1 = R$ a $R^{n+1} = R^n \circ R$.

a) Dokažte, že pokud je X konečná, existují dvě přirozená čísla r, s, že $R^r = R^s$. *(2 body)*

b) Nalezněte relaci R takovou, že pro libovolné přirozené číslo n je $R^n \neq R^{n+1}$. *(2 body)*

c) Ukažte, že je-li X nekonečná, existuje relace R taková, že všechny R^n jsou navzájem různé. *(3 body)*