Diskrétní matematika: série 5 – Kombinatorické počítání

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. V americkém senátu je 100 senátorů, za každý z 50 států přesně dva. Kolika způsoby je možné vybrat čtyřčlenný výbor tak, aby v něm nebyli z žádného státu oba senátoři? *(1.5 bodu)*

Úloha 2. Kolik existuje deseticiferných čísel, které obsahují 4× číslici 4, 3× číslici 3, 2× číslici 2 a 1× číslici 1? Například jedno takové číslo je 4132234344. *(2 body)*

Úloha 3. Troška lineární algebry:

a) Kolik existuje matic $n \times n$ tvořených prvky $\{0, 1, \ldots, q-1\}$? *(1 bod)*

$\star$ b) Předpokládejme navíc, že q je prvočíslo, tedy existuje konečné těleso $GF(q)$. Kolik matic $n \times n$ nad $GF(q)$ je singulárních? Matice je regulární, pokud má všechny řádky lineárně nezávislé, jinak je singulární. *(3 body)*

Úloha 4. Dokažte, že $(n!)^k$ dělí $(kn)!$ pro každé n a k přirozené. *(2 body)*

Úloha 5. Řád permutace π je nejmenší k takové, že $\pi^k = \mathrm{id}$, kde $\pi^k = \pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi$ (složeno k permutací π). Nalezněte a dokažte souvislost řádu permutace s délkami cyklů. *(3 body)*

Úloha 6. V této úloze budeme počítat obdélníky v mřížce $n \times n$. Na obrázku vlevo je naznačena situace pro $n = 6$.

a) Kolik existuje takových obdélníků? Například pro $n = 2$ existuje 9 obdélníků. *(2 body)*

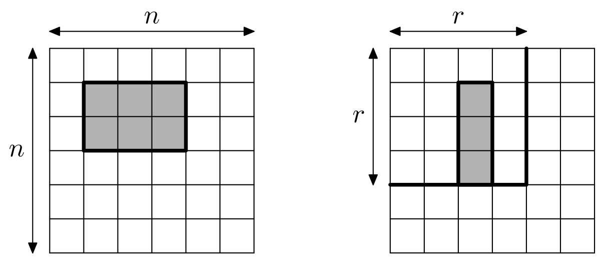
b) Dokažte, že existuje přesně r^3 obdélníků, které se celé nacházejí v levém horním rohu $r \times r$ a dotýkají se tučně vyznačené oddělující čáry (tedy pravého nebo dolního okraje čtverce $r \times r$), viz obrázek vpravo. *(2 body)*

c) Dokažte rovnost

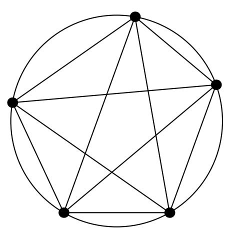
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{1}{4}\big(n(n+1)\big)^2$$

ze druhé série počítáním počtu obdélníků v mřížce dvěma způsoby, jednou podle části a), podruhé podle části b). *(2 body)*

d) Kolik existuje čtverců v mřížce $n \times n$. Například pro $n = 2$ existuje 5 čtverců. *(2 body)*



Úloha 7$\star$. Uvažme n bodů na kružnici. Dokažte, že pokud spojíme každý s každým přímkou a žádné tři přímky se neprotínají v jednom bodě, rozdělují přímky kruh na $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ částí. Na obrázku je nakreslena situace pro pět bodů, které dělí kruh na 16 částí.



Poznámka: Tahle úloha je pěkným příkladem, proč není možné nic usuzovat z prvních členů poslopnosti. Nechť a_n označuje počet částí pro n bodů. Pokud spočítáme počty částí pro malá n, dostáváme posloupnost $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$ a $a_5 = 16$. Mohlo by se zdát, že výsledek je $a_n = 2^{n-1}$. To je však zcela špatně už pro následující člen, neboť $a_6 = 31$. *(5 bodů)*

Úloha 8. V této úloze budeme počítat trojúhelníky v trojúhelníkové mřížce.

a) Dokažte, že pro libovolné r a n přirozené platí následující kombinatorická identita:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{r+n}{r} = \binom{r+n+1}{r+1}.$$

(3 body)

b) Uvažte čísla uspořádaná do pyramidy o výšce n jako na obrázku vlevo (pro $n = 6$). Dokažte, že součet na r-tém řádku je přesně $\binom{r+1}{2}$. Vyjádřete součet všech čísel v celé pyramidě jako jediné kombinační číslo. *(2 body)*

c) Spočítejte součet čísel v pyramidě jiným způsobem a dokažte, že

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + n \cdot 1 = \binom{n+2}{3}$$

⋆ d) Uvažujme trojúhelníkovou mřížku výšky n jako na obrázku vpravo (pro $n = 6$). Kolik trojúhelníků natočených stejně jako trojúhelník ABC tato mřížka obsahuje? *(2 body)*

⋆ e) Vyjádřete počet trojúhelníků natočených obráceně jako součet kombinačních čísel. *(3 body)*