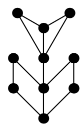
Diskrétní matematika: druhá písemka

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat, můžete se samozřejmě odkazovat na tvrzení z přednášky či cvičení. Pro řešení nepoužívejte kalkulačky, cibulačky, zápisky, skripta, učebnice, čarodějnice, sousedy či jakékoli další zakázané pomůcky. V případě jakýchkoli nejasností se zeptejte cvičícího. Zadání si můžete nechat, na řešení máte $90 \pm \varepsilon$ minut.[1] Hodně štěstí!

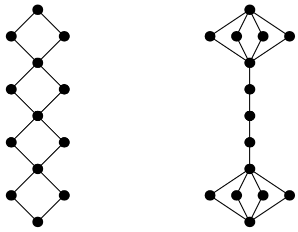
Úloha 1. Nalezněte minimální, nejmenší, maximální a největší prvky v následujícím částečném uspořádání. Vysvětlete, jaký je rozdíl mezi minimálním a nejmenším prvkem částečného uspořádání.



(5 bodů)

Úloha 2. Lineární rozšíření částečného uspořádání $(X, <)$ je lineární uspořádání $(X, <')$, že každá porovnatelná dvojice v $<$ je stejně porovnaná i v $<'$. Nechť $\mathcal{L}((X,<))$ značí počet různých lineárních rozšíření $(X, <)$.

a) Zjistěte, kolik různých lineárních rozšíření mají následující uspořádání popsaná Hasseho diagramem.



(5 bodů)

b) Zobecněte výše uvedená uspořádání a nalezněte pro každé $k \in \mathbb{N}$ částečná uspořádání (pro vhodný počet prvků n), která mají 2^k a $k! \cdot k!$ lineárních rozšíření. *(5 bodů)*

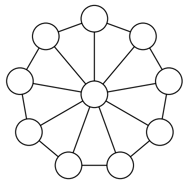
c) Mějme dvě uspořádání $(X, <)$ a $(Y, <)$ na disjunktních množinách X a Y. Uvažme disjunktní sjednocení $(X \cup Y, <)$, což je uspořádání na $X \cup Y$ takové, že žádný prvek z x není porovnatelný s žádným prvkem z y, prvky v X jsou porovnatelné podle $(X, <)$ a prvky v Y jsou porovnatelné podle $(Y, <)$. Tedy odpovídá to tomu, že Hasseho diagramy nakreslíme zvlášť do jednoho obrázku. Nalezněte vzorec pro $\mathcal{L}((X \cup Y, <))$ v závislosti na $\mathcal{L}((X, <))$ a $\mathcal{L}((Y, <))$. *(5 bodů)*

d) Dokažte, že pokud má částečné uspořádání minimální prvek a, potom existuje jeho lineární rozšíření, že a je minimálním prvkem i tohoto lineárního rozšíření. *(5 bodů)*

Úloha 3. Nalezněte graf, který má všechny vrcholy sudého stupně a přitom nemá uzavřený Eulerovský tah. Proč existence takového grafu není v rozporu z větou z přednášky? *(5 bodů)*

Pro připomenutí: To je tah, který postupně prochází všechny hrany grafu, každou právě jednou, a končí tam, kde začíná—což odpovídá kreslení grafu tužkou, aniž by ji člověk musel zvednout z papíru.

Úloha 4. Nalezněte korektní obarvení vrcholů následující grafu využívající co nejmenší počet barev. Pro připomenutí, korektní obarvení přiřazuje vrcholům čísla 1 až k, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. Navíc dokažte, že graf nelze obarvit menším množstvím barev.



(5 bodů)

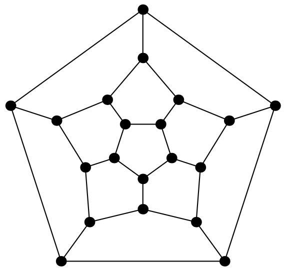
Úloha 5. Nalezněte maximální množinu stromů na 4 vrcholech $\{a, b, c, d\}$, které jsou po dvou neizomorfní. Dva grafy jsou izomorfní, pokud se liší pouze přejmenováním vrcholů. *(5 bodů)*

Úloha 6. Nalezněte graf s osmi vrcholy, jehož skóre je $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$, nebo dokažte, že neexistuje. Existuje graf se sedmi vrcholy, jehož skóre je $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$? *(5 bodů)*

[1] Kde ε naštěstí nevolí nepřítel, nýbrž cvičící.

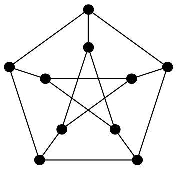
Úloha 7. Hamiltonovská kružnice v grafu je kružnice, která prochází všemi vrcholy grafu.

a) Nalezněte Hamiltonovskou kružnici v grafu dvanáctistěnu.



(5 bodů)

b) Dokažte, že slavný Petersenův graf nemá Hamiltonovskou kružnici.



(5 bodů)