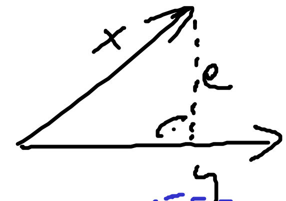
Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro každé vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle^2 \le \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$$



<u>Důkaz:</u> Využime projekci; platí, že

$$0 \le \|\mathbf{e}\|^2 = \left\|\mathbf{x} - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}\mathbf{y}\right\|^2 \overset{\substack{\text{podle def.}\\ \|a\|^2 = \langle a|a\rangle}}{=} \left\langle \mathbf{x} - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}\mathbf{y} \,\middle|\, \mathbf{x} - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}\mathbf{y}\right\rangle \overset{\substack{\text{využijeme}\\ \text{linearitu}}}{=}$$

toto jsou skaláry

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle - 2\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle + \frac{\langle x|y\rangle^2}{\langle y|y\rangle^{\cancel{2}}}\cancel{\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle} \overset{\substack{\text{převedeme}\\ \text{na společný zlomek}}}{=} \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle - \langle x|y\rangle^2}{\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle}$$

A protože jmenovatel je kladný (kdyby $\mathbf{y}=0$, vyřešíme už předtím),

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}^2\rangle \le \langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2. \qquad \square$$

Příklad Gram-Schmidtovy ortogonalizace

Aby byl výpočet jednodušší, normujeme až nakonec, tedy:

$$\boxed{q_i = a_i - \underbrace{\frac{\langle a_i|q_1\rangle}{\langle q_1|q_1\rangle}}_{\langle q_1|q_1\rangle = \|q_1\|^2} q_1 - \dots - \underbrace{\frac{\langle a_i|q_{i-1}\rangle}{\langle q_{i-1}|q_{i-1}\rangle}}_{\langle q_{i-1}|q_{i-1}\rangle = \|q_{i-1}\|^2} q_{i-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}: \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|q_1\|^2 = 2; \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \|q_2\|^2 = 3/2$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/\cancel{2}}{3/\cancel{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \|q_3\|^2 = \frac{4}{3}$$

výpočet je pěkný humus =)

výsledná $Q \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$