1 Limity podle definice

Jak zní definice vlastní / nevlastní limity? Jak lze formulovat limitu v řeči okolí bodu?

Úloha 1. Spočtěte přímo podle definice limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}.$$

Úloha 2. Určete limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$ pro posloupnost $\{a_n\}$, kde

$$a_n = 0.\underbrace{999\ldots999}_{n}.$$

Úloha 3. Spočtěte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \cos(-1)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{2}.$$

2 Tvrzení o limitách

Úloha 4. Objevte vztah mezi $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{n\to\infty} |a_n|$.

a) Pokud posloupnost a_n obsahuje pouze konečně mnoho kladných / záporných členů?
b) Pokud posloupnost a_n obsahuje nekonečně mnoho záporných a nekonečně mnoho kladných členů?

Úloha 5. Dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Platí obrácená implikace?

Úloha 6. Pro která $q \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{n\to\infty} q^n$?

Úloha 7. Dokažte, že platí:

a) Pokud je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní, potom je omezená.
b) Pokud je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní, potom je cauchyovská.
c) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
d) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$ a $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = A$, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Úloha 8. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení, případně je opravte:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A$.
b) $\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$.
c) Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti, pro které platí:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < b_n.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$. Platí obrácená implikace?

3 Hromadné body

Pro posloupnost $\{a_n\}$ je A *hromadný bod*, pokud existuje vybraná podposloupnost $\{a_n\}$, která konverguje k A.

Úloha 9. Platí, že posloupnost je konvergentní, právě když má přesně jeden hromadný bod?

Úloha 10. Dokažte, že A je hromadný bod $\{a_n\}$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ obsahuje $\mathcal{B}_\varepsilon(A)$ nekonečně mnoho prvků $\{a_n\}$.

Úloha 11. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$, která má nekonečně mnoho hromadných bodů.