1 Konvergence nezáporných řad

Jak se definuje konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$? Jaká znáte kritéria konvergence, pokud jsou všechny členy a_n nezáporné?

Úloha 1. Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k2^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{k^2}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos k}{2+\cos k}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

Úloha 2. Připomeňte si, jak funguje kondenzační kriterium. Pomocí něj vyšetřete konvergenci řad s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$. Funguje pro tyto řady podílové a odmocninové kriterium?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log^\alpha k}.$$

Úloha 3. Vyšetřete konvergenci řad s parametrem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{2^k}, \text{ kde } \alpha > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right), \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Úloha 4. Mějme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s kladnými členy. Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, platí pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$, že konverguje, diverguje nebo nelze jednoznačně určit? Co platí pro $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$, když naopak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje?

2 Absolutní konvergence

Úloha 5. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ následující veledůležité řady konvergují. Pro která x konvergují absolutně?

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{6!} + \cdots.$$

Úloha 6. Zjistěte, zda následující řady konvergují absolutně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sin k$$

3 Zajimavější úlohy

Úloha 7. Nalezněte co nejvíc důkazů divergence harmonické řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Nechť $\mathbb{P}$ značí množinu všech prvočísel. Dokažte divergenci i pro řadu $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$.

Úloha 8. Dokažte, že existuje posloupnost $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ kruhů v rovině takových, že jejich sjednocení protíná libovolnou přímku a zároveň mají konečný součet obsahů.