1 Složitější limity funkcí

Budou se zcela určitě hodit hodnoty následujících limit u nuly:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

Myšlenka je, že pokud se v limitě objeví třeba funkce sin s argumentem jdoucím k nule, je možné tam úpravami dostat výše uvedený výraz a sinu se pomocí aritmetiky limit zbavit.

Také se bude hodit věta o limitě složené funkce. Co tato věta říká? Jaké předpoklady musí funkce splňovat?

Úloha 1. Vyřešte následující limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x\cos x}{x^4},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Úloha 2. Spočtěte limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{x},\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x-x^2)}{x},\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\big(\sin(\sin x)\big)}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}x^k,\ \text{kde } k\in\mathbb{Z}.$$

Úloha 3. Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{k}-\frac{1}{k}}{k^{\alpha}},\ \text{kde } \alpha\in\mathbb{R},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}e^{\frac{1}{k}}-1-\frac{1}{k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{k}-\sin\frac{1}{k}\right)\cdot k^2.$$

2 Derivování

Dále se budeme zabývat derivováním. Vzpomeňte si, jak vypadá derivace součtu, součinu, podílu, derivace složené funkce, derivace elementárních funkcí, ...

Úloha 4. Zderivujte funkce, navíc zjistěte definiční obor funkce a její derivace. Pozor, vždy $D_{f'}\subseteq D_f$!

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad \sin\frac{x+1}{x^2+1},\qquad \cos(\ln x),\qquad \ln\frac{x^2-1}{x^2+1},\qquad x^x,\qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}},\qquad \sin^{\cos x}x.$$

Úloha 5. Vypočtěte derivace funkcí f, g a h, nezapomeňte vyšetřit v krajních bodech!

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x\in[a,b],\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2} & \text{pro } |x|\le 1,\\ \frac{1}{e} & \text{pro } |x|>1.\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{pro } x\neq 0,\\ 0 & \text{pro } x=0.\end{cases}$$

Úloha 6. Dokažte (bez použití vzorců), že pro libovolné x platí $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Úloha 7. Spočtěte limity s použitím l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}}{x^b},\ \text{kde } a\in\mathbb{R}^+,b\in\mathbb{N},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin x^2}.$$