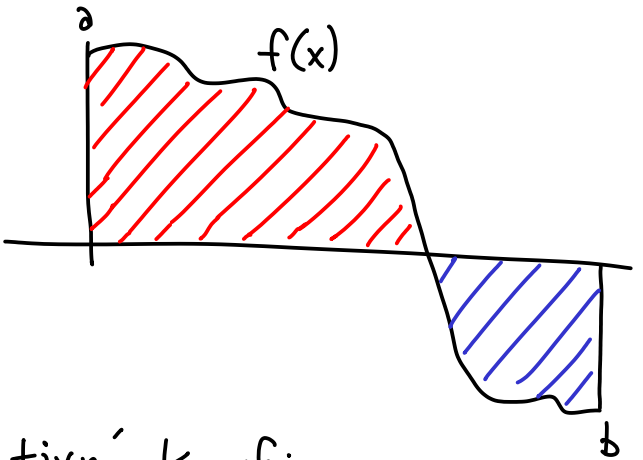
Grafické vysvětlení substituce v integrálech

Pavel Klavík

Určitý integrál počítá obsah pod křivkou.

$$\int_a^b f(x) = \text{▨} - \text{▨}$$

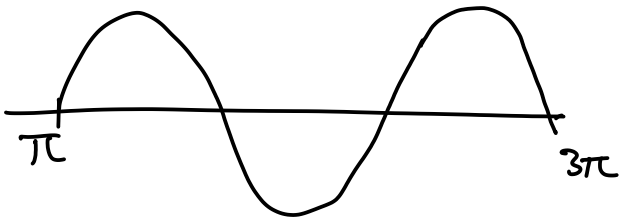


Věta: Pro F primitivní k f:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

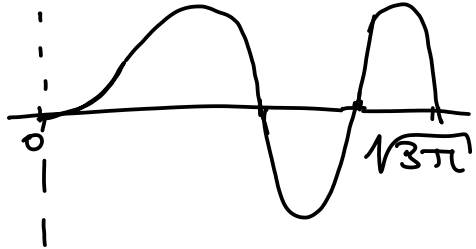
Proč neplatí, že $\int f(g(x))dx = F(g(x))$?

$$\int_0^{3\pi} \sin x \, dx$$



UMÍME SPOČÍTAT

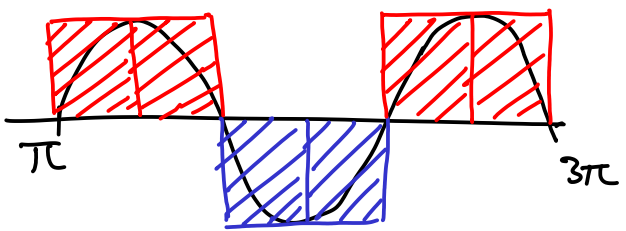
$$\int_0^{\sqrt{3\pi}} \sin x^2 \, dx$$



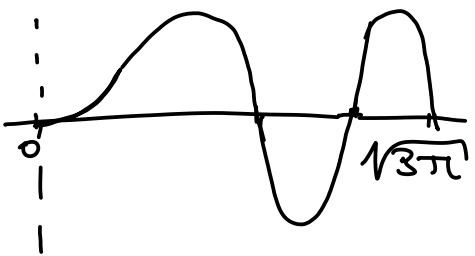
CHCEME SPOČÍTAT

Proč neplatí, že $\int f(g(x))\,dx = F(g(x))$?

$$\int_0^{3\pi} \sin x\,dx$$



$$\int_0^{\sqrt{3\pi}} \sin x^2\,dx$$

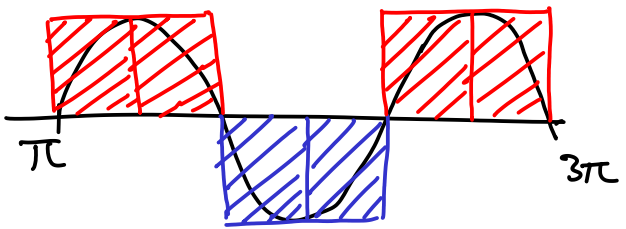


ZVOLÍME DOSTATEČNĚ JEMNÉ DĚLENÍ A SPOČÍTÁME OBSAH NALEVO

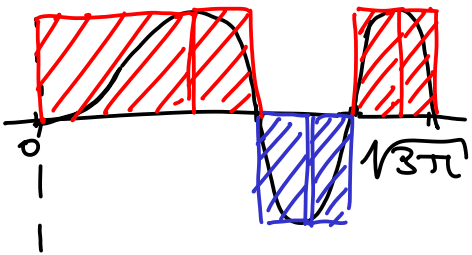
$\sum$ červené $-$ $\sum$ modré

Proč neplatí, že $\int f(g(x))\,dx = F(g(x))$?

$$\int_0^{3\pi} \sin x\,dx$$



$$\int_0^{\sqrt{3\pi}} \sin x^2\,dx$$



Musíme je proto v sumě započítat s různými váhami, které odpovídají $g'(x)$.

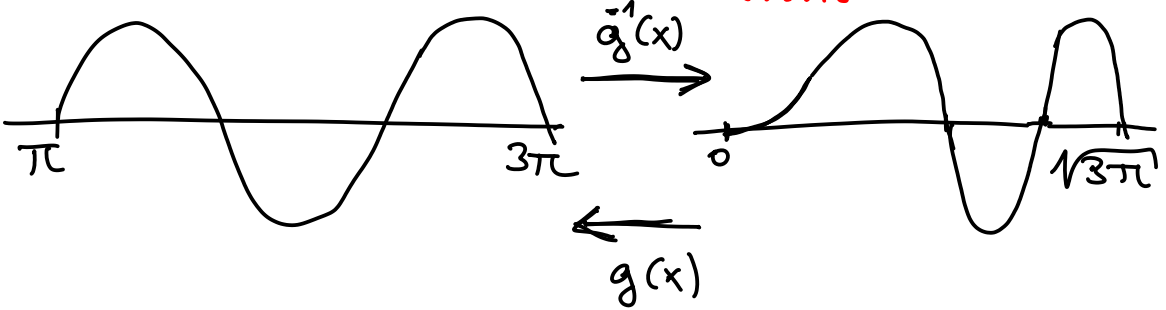
OBDÉLNÍKY MAJÍ RŮZNÉ ŠÍŘKY

Lokální změna obsahu je všude různá, ale odpovídá $g'(x)$.

Dvě věty odpovídají tomu, kterým směrem transformujeme

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x))$$

váha, lokální rychlost transformace

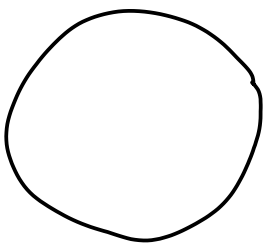


Transformace jako změna souřadnic

obsah kruhu

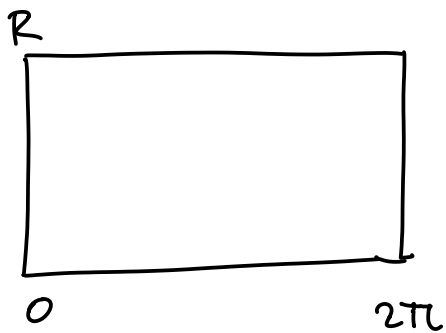
$$\iint_{x^2+y^2 \le 1} 1 \, dx\,dy$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} 1 \, dr\,d\varphi$$



přechod do pol. souř.

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$



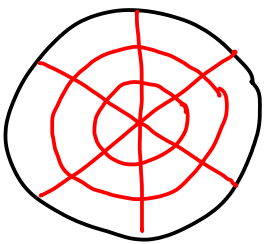
Transformace jako změna souřadnic.

obsah kruhu

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} 1 \, dx\,dy$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} 1 \, dr\,d\varphi$$

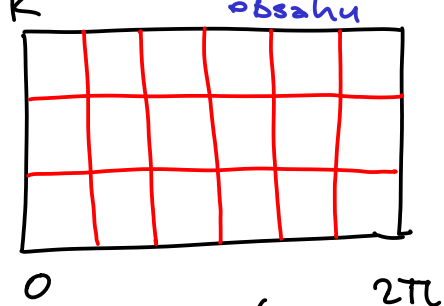
$\det J_\varphi$ lokální změna obsahu



přechod do pol. souř.

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$



Obrazy různých obdélníků mají různé obsahy.