1 Hledání extrémů

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

Úloha 1. Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?

Úloha 2. Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

Úloha 3. Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

Úloha 4. Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr?

Nápověda. Použijte Jensenovu nerovnost: Pro konvexní funkci f a čísla α_i, x_i taková, že $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí, že

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i)\,.$$

Úloha 5. Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B. S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

2 Výpočet primitivní funkce

Pro funkci $f(x)$ budeme hledat primitivní funkci $F(x)$, tedy takovou funkci, že $F'(x) = f(x)$. Primitivní funkci se často říká *integrál* a značí $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Klíčovou vlastností je, že pokud taková funkce existuje, potom je určena jednoznačně až na konstanty; tedy výsledek můžeme uhodnout a ověřit derivováním. Další užitečná vlastnost je linearita primitivní funkce. Při integrování nezapomeňte určit interval, na kterém je výsledek platný.

Úloha 6. Nalezněte primitivní funkce k následujícím základním funkcím a určete intervaly, na kterých jsou definované.

$$x^a,\ \text{kde } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{x}, \quad e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{1+x^2}.$$

Úloha 7. Co znamená linearita primitivní funkce?

Úloha 8. Základní příklady, s použitím výše uvedených funkcí a linearity.

$$\int x^3 + 2x + \frac{1}{7}x\,\mathrm{d}x, \qquad \int (x+5)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin(2x+7)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 9. Proč je primitivní funkce určena jednoznačně až na konstantu?

Nápověda. Dokažte bez použití jednoznačnosti, že $\int 0\,\mathrm{d}x = C$, a využijte to.

3 Věty o substituci

Věty o substituci umožňuje řešit komplikovanější integrály. Existují dvě věty o substituci.

Věta. *Mějme funkce $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α, β) vlastní derivaci.*

- *Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak na intervalu (α, β) platí:*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = F(\varphi(t)).$$

- *Nechť navíc φ má buď všude kladnou, nebo všude zápornou derivaci, tedy speciálně je prostá a existuje k ní funkce inverzní. Nechť $G(t)$ je primitivní funkce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (a, b). Pak na intervalu (a, b) platí:*

$$\int f(t) \, \mathrm{d}t = G(\varphi^{-1}(t)).$$

Úloha 10. Zopakujte si věty o substituci. S jejich použití vyřešte:

$$\int \sin(2x+7) \, \mathrm{d}x, \qquad \int 18e^x + 16e^{8x} + 3\cos x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x} \sin(\log x) \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^2+4} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int \sqrt[3]{1-3x} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sin^7 x \cos x \, \mathrm{d}x, \qquad \int x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \tan x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x}{1+x^4} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^2}{\cos x^3} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 11. Nechť $f(x)$ je funkce, která má vlastní derivace na uvažovaném intervalu. Vyřešte obecně:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 12. Obtížnější příklady na závěr:

$$\int \sqrt{1-\sin x} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sin^{2k+1} x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \cos^{2k+1} x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x.$$