1 Obecný postup

Při vyšetřování průběhu funkce zjistíme postupně:

(1) Definiční obor funkce.
(2) Zda je funkce sudá, lichá, periodická.
(3) Kde je funkce nulová, kladná, záporná.
(4) Spojitost v bodech definičního oboru.
(5) Limity (příp. jednostranné) v krajních bodech definičního oboru (to může být i $\pm\infty$) a v bodech nespojitosti, pokud existují.
(6) Asymptoty v ∞ a v $-\infty$, odsud již můžeme zhruba odhadnout průběh funkce. Pro připomenutí, přímka $ax+b=0$ je asymptotou funkce f u $\pm\infty$, pokud $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$. Koeficienty a a b můžeme spočítat postupně:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}.$$

Pokud některá z limit neexistuje, potom funkce v $\pm\infty$ asymptotu nemá.
(7) Pro zpřesnění spočteme:
(8) Existenci a hodnotu oboustranné derivace, resp. jednostranných derivací.
(9) Maximální intervaly, na nichž je funkce monotonní.
(10) Lokální a globální extrémy.
(11) Druhou derivaci a odsud maximální intervaly, na nichž je funkce konkávní resp. konvexní, inflexní body.
(12) Nakonec nakreslíme graf funkce a určíme její obor hodnot.

Poznámka. Druhou derivaci není nutné zjišťovat vždy, občas lze konvexitu/konkavitu zjišťovat jinak: Funkce f je na intervalu J konvexní, pokud je f' na J rostoucí, a konkávní pokud je f' klesající.

2 Příklady

Vyšetřete následující funkce:

Úloha 1. Polynomy:

$$f_1(x) = x^2 - x^4, \qquad f_2(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2.$$

Úloha 2. Racionální funkce:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}, \qquad f_3(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}, \qquad f_4(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Úloha 3. S absolutní hodnotou:

$$f_1(x) = x + 2 + \frac{3}{|1+x|}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x = 1, \\ \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} & \text{pro } x \neq 1. \end{cases}$$

Úloha 4. S goniometrickými funkcemi:

$$f_1(x) = x + \sin x, \qquad f_2(x) = |\sin x| + \cos 2x.$$

Úloha 5. Exponenciály:

$$f_1(x) = e^x - x, \qquad f_2(x) = x^x, \qquad f_3(x) = x^{1/x}.$$