1 Rozklad na parciální zlomky

Platí následují překvapivá hrůzostrašně vypadající věta.

Věta (Existence rozkladu na parciální zlomky)**.** *Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dva polynomy a stupeň P je menší jak stupeň Q. Pokud*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + \beta_j x + \alpha_j)^{l_j}$$

(kde trojčleny $x^2 + \beta x_j + \alpha j$ jsou nerozložitelné), existuje rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{q=1}^{k_i} \frac{A_{q,i}}{(x - \alpha_i)^q} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{q=1}^{l_j} \frac{C_{q,j} x + D_{q,j}}{(x^2 + \beta_j x + \alpha_j)^q}.$$

a reálné koeficienty $A_{p,q}$, $C_{p,q}$ a $D_{p,q}$ jsou určené jednoznačně.

Lidsky řečeno, každý podíl dvou polynomů $P(x)/Q(x)$ můžeme rozložit na součet jednoduchých základních racionálních funkcí. Tyto racionální funkce jsou dvou typů: První mají ve jmenovateli mocninu kořene, druhé mají ve jmenovateli mocninu nerozložitelného kvadratického polynomu.

Abychom nalezli tento rozklad $P(x)/Q(x)$, postupujeme ve dvou krocích:

(1) Pokud stupeň P je alespoň tak veliký jako stupeň Q, vydělíme $P(x)/Q(x)$ a dále pracujeme s podílem zbytku.

(2) Rozložíme podíl na součet parciálních zlomků, koeficienty nalezneme jako řešení soustavy lineárních rovnic.

2 Integrace racionálních funkcí

Pokud chceme zintegrovat libovolnou racionální funkci $P(x)/Q(x)$, nejprve spočítáme její rozklad na parciální zlomky. Poté s využitím linearity integruje jednotlivé členy rozkladu, což jsou následující tabulkové racionální funkce:

$$\int \frac{1}{x^k} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \log|x| & \text{pro } k = 1, \\ \frac{1}{-k+1} x^{-k+1} & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\int \frac{2x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = \log(1 + x^2),$$

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^k} \,\mathrm{d}x = I_k,$$

kde I_k se definuje rekurzivně jako

$$I_1 = \arctan x \qquad \text{a} \qquad I_{k+1} = \frac{x}{2k} \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^k + \frac{2k - 1}{2k} I_k.$$

Úloha 1. Nalezněte vypadají primitivní funkce k základním racionálním funkcím:

$$\int \frac{1}{(x + \alpha)^k} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(x^2 + \beta x + \alpha)^k} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{Ax + B}{(x^2 + \beta x + \alpha)^k} \,\mathrm{d}x.$$

Úloha 2. Určete primitivní funkce

$$\int \frac{x^4}{x^3 - 1} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^3 - 4x - 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x}{(x - 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^6 - 1} \,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^2 + x}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} \,\mathrm{d}x.$$

3 Určitý integrál

Pokud známe primitivní funkci $F(x)$ a je spojitá na intervalu (a,b), potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Navíc platí obdoby vět pro určité integrály:

Per partes pro určitý integrál:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Substituce pro určitý integrál:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \textstyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 3. Spočtěte

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

4 Aplikace integrálu

Pokud je křivka daná funkcí, tedy $y = f(x)$ pro $x \in [a,b]$, potom plocha pod ní má obsah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud je křivka dána parametricky $y = f(t)$, $x = g(t)$ pro $t \in [a,b]$, plocha pod touto křivkou je $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Pokud je křivka dána v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$ pro $\varphi \in [\alpha,\beta]$, je plocha mezi křivkou a středem souřadnic rovna $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$.

Úloha 4. Spočtěte obsah obdélníku, trojúhelníku, kruhu a plochy sevřené křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ a $x = 2$.

Pro křivku danou funkcí, tedy $y = f(x)$ pro $x \in [a,b]$, je její délka rovna

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Proč? Křivku aproximujeme lomenou čarou a její délku počítáme podle Pythagorovy věty. Podobně pro křivku danou parametricky a v polárních souřadnicích dostáváme

$$\int_a^b \sqrt{f^2(t) + g^2(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{a} \qquad \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Úloha 5. Spočtěte obvod kružnice, délku křivky $x^{3/2}$ pro $x \in [0,a]$ a délku křivky $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$ pro $x \in [1,e]$.

Úloha 6. Zjistěte pomocí integrálního kritéria, zda následující řady konvergují (s parametrem α):

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\log^\alpha k}.$$

Úloha 7. Odhadněte funkci $n!$ pomocí integrálu.

Nápověda. Zkuste použít logaritmus.