Vzorové řešení písemky

① řešíme opakovanou aplikací per partes, logaritmus derivujeme a 1 integrujeme

Zkusme $\int \ln^k x \overset{PP}{=} x\ln^k x - k\int \ln^{k-1} x$

$f = \ln^k x \quad g = x$

$f' = k\frac{\ln^{k-1} x}{x} \quad g' = 1$

f' a g se pěkně pokrátí

A APLIKUJEME TOTO TŘIKRÁT

$\Rightarrow \int \ln^3 x = x\ln^3 x -$

$3\int \ln^2 x = x\ln^3 x -$

$3x\ln^2 x + 6\int \ln x =$

$x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x$

$- 6\int 1$

Tedy:

$$\int \ln^3 x = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$$

---

2) $\int \frac{\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)^2} \sin x\,dx$

zde se přímo vybízí substituce tak, že $\sin x\,dx$ nahradíme za dy, tedy $y = \cos x$ a $dy = -\sin x\,dx$.

$= -\int \frac{y^2}{(1-y^2)^2}\,dy$

což řešíme rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{y^2}{(1-y)^2(1+y)^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{(1+y)^2} + \frac{C}{1-y} + \frac{D}{(1-y)^2}$$

$$y^2 = A(1+y)(1-y)^2 + B(1-y)^2 + C(1-y)(1+y)^2 + D(1+y)^2$$

Rovnost mezi polynomy, zjišťujeme dosazováním za y:

$y=1 \Rightarrow \quad 1 = 4D \quad D = \frac{1}{4}$

$y=-1 \Rightarrow \quad 1 = 4B \quad B = \frac{1}{4}$

$y=0 \Rightarrow \quad 0 = A+B+C+D \Rightarrow \quad A+C = -\frac{1}{2}$

po rozná̀sobení u třetích mocnic dostaneme $A-C=0$

tedy $A = -\frac{1}{4}$

$C = -\frac{1}{4}$

A stačí dopočítat primitivní funkce podle tabulek, stačí lin. substituce $t = 1 \pm y$

$$4\int \frac{y^2}{(1-y^2)^2}\,dy = -\int \frac{1}{1+y} - \int \frac{1}{1-y} + \int \frac{1}{(1+y)^2} + \int \frac{1}{(1-y)^2}$$

$$= -\log|1+y| - \log|1-y| - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}$$

Nezapomeneme na konstanty a substituci za y a dostáváme:

$$\int \frac{\cos^2 x \sin x}{(1-\cos^2 x)^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(\log|1+\cos x| + \log|1-\cos x| - \frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}\right) + C$$

CO̊Z FUNGUJE VŠUDE, KDE JE FUNKCE DEF.

(3.) Limita se def. úplně stejně, ale jako vzdálenost použijeme metriku místo absolutní hodnoty rozdílu.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad d(a_n, L) < \varepsilon.$$

Teď důkaz:

„⇒" Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ a $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná podposloupnost.

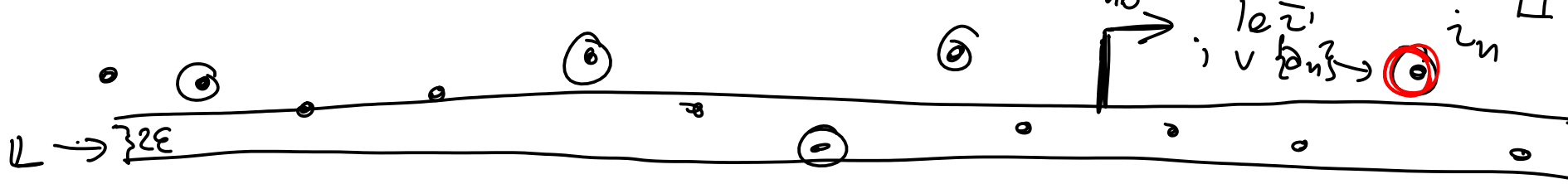
Důležité je, že $i_n \geq n$, a proto pro dáné ε lze zvolit stejné n_0 a bude to snadno platit:

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow i_n \geq n_0 \quad \text{a proto podle} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{víme, že} \quad d(L, a_{i_n}) < \varepsilon.$$

Toto je to zjevnější implikace.

„⇐" Předpokládejme, že by existovala špatná vybraná podposloupnost $\{a_{i_n}\}$, že pro dané ε podmínka konv. není splněna.

Potom neplatí ani pro $\{a_n\}$, neboť pro každé n_0 existuje špatný i_n - index, že $d(L, a_{i_n}) \geq \varepsilon$, ale $i_n \geq n$ a tedy je to špatný index i pro $\{a_n\}$. □



④ Funkce $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$ je polynom, takže je spoj. a dif.

$$f(x,y) = 6x^2y^3 - x^3y^3 - x^2y^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12xy^3 - 3x^2y^3 - 2xy^4 = xy^3(12-3x-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 18x^2y^2 - 3x^3y^2 - 4x^2y^3 = x^2y^2(18-3x-4y)$$

Zbývají extrémy, kandidát je na M jediný:

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y &= 12 \\ 3x+4y &= 18 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} y &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}}$$

Spočítáme Hesseho matici a určíme definitnost:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 12y^3 - 6xy^3 - 2y^4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 36x^2y - 6x^3y - 12x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3$$

a dosadíme bod (2,3)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 12\cdot 27 - 12\cdot 27 - 6\cdot 27 & \text{to samé} \ldots \\ 72\cdot 9 - 36\cdot 9 - 16\cdot 27 & 9\cdot 16\cdot 3 - 9\cdot 16 - 48\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{pmatrix}$$

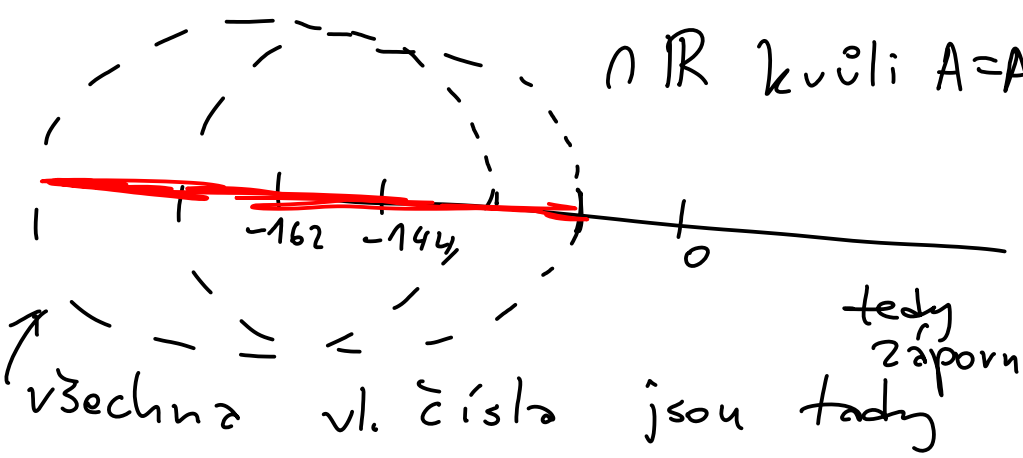
Matice je silně neg. na diagonále, je tedy negativně def. a bod (2,3) je lok. max.

Třeba $|-162) = -162$

a $\begin{vmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{vmatrix} > 0.$

Nebo Gershgorinovy disky:

$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ kvůli $A = A^T$



Tvrdíme, že je to globální maximum a zdola je funkce neomezená. Pro neomezenost stačí dosazovat velké hodnoty x a y.

$$f(x,y) = x^2 y^3 (6-x-y)$$

kladné velké — záporné velké

pro $x=y \to +\infty$

$\lim f(x,y) = -\infty$.

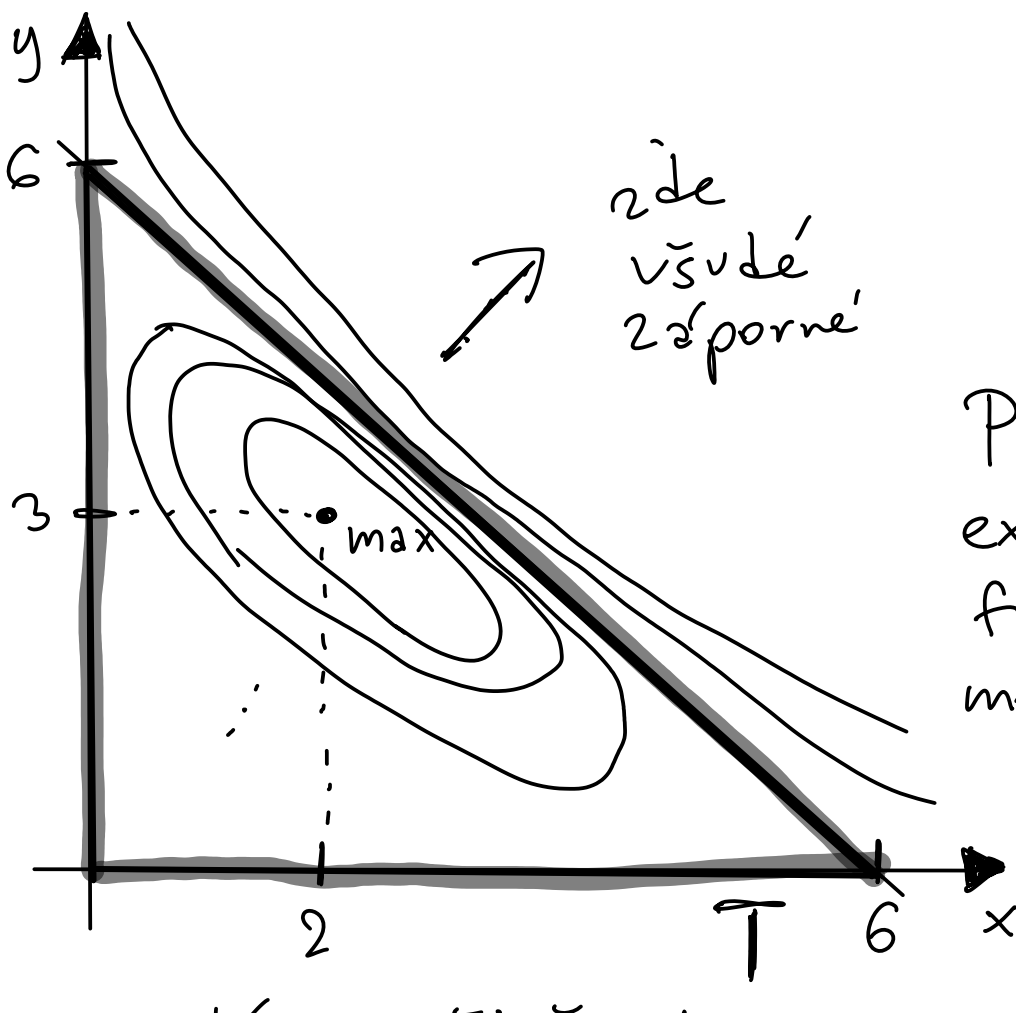
$f(2,3) = 4 \cdot 27 = 108$, a chceme ukázat, že

$f(M) = (-\infty; 108]$.

Stačí dokázat omezenost shora, ukážeme i pro $N = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Pro $x=0$ nebo $y=0$ dostáváme $f(x,y)=0$

Podobně pro $x+y=6$, tedy nakreslíme si N.



na celé množině M.

Na hranici T je $f(x,y) = 0$, uvnitř kladné, mimo záporné

Protože T je kompakt, existuje pro spoj. funkci min a max, max nemůže být na hranici, tam je min, proto je max $(2,3)$ a to je globální max