1 Matice pro výpočet lineárních rekurencí (20 bodů)

Na úvod si ve stručnosti popišme, jak počítat Fibonacciho čísla pomocí umocňování matic; ve větších podrobnostech popsáno na konci kapitoly 3.1 textu Povídání o Lineární algebře. Nechť f_n je n-té Fibonacciho číslo, definováno takto:

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Uvažme matici A a vynásobme jí zprava vektorem obsahující dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k + f_{k+1} \\ f_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+2} \\ f_{k+1} \end{pmatrix},$$

tedy násobením A se posouváme v posloupnosti Fibonacciho čísel o jedna doprava. Proto platí, že

$$\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{-krát}} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix},$$

kde první rovnost platí díky asociativitě. Navíc A^n umíme spočítat v čase $\mathcal{O}(\log n)$.[1]

Zkusíme výše uvedený postup zobecnit. Máme nějakou obecnou zadanou lineární rekurentní posloupnost. Několik prvních členů x_0 až x_{k-1} je pevně určeno. Každý další člen je lineární kombinace k předcházejících členů, tedy platí

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \alpha_{k-2} x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n$$

pro pevná čísla α_0 až α_{k-1}.

Příklad. Posloupnost může mít třeba určené první tři členy $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ a další členy jsou určeny předpisem $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + 3x_n$. Začátek posloupnosti vypadá takto:

$$(1, 2, 3, 4, 7, 12, 17, 26, 45, \ldots).$$

Úloha 1.1. Zobecněte postup výpočtu pro obecnou lineární rekurenci. Pro zadané k a koeficienty $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ popište, jak se matice A zkonstruuje. Pochopitelně také dokážte, že má požadováné vlastnosti. Tím pochopíte, jak jsme matici A pro Fibonacciho čísla získali.

Nápověda. Zkuste nejprve uvažovat posloupnosti pro $k = 2$, tedy posloupnosti, které závisí pouze na dvou předcházejících členech.

Poznámka. Matice A je zajímavá, i když nechceme zkonstruovat rychlý algoritmus. V létě si ukážeme, jak z ní lze vydolovat vzorec pro n-tý člen lineární rekurence. K tomu se budou hodit vlastní čísla matice A. Ta nám umožní převést matici do Jordanova tvaru, ve kterém bude vzorec přímo vidět.

2 Permutační matice (25 bodů)

Permutace již známe z diskrétní matematiky. Permutace π je bijektivní zobrazení $\pi : X \to X$, tedy různým prvkům z X přiřazujeme různé prvky. Intuitivně je permutace pouze nějaké přeuspořádání prvků v X. Nás budou zajímat permutace množiny $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pro permutaci π je permutační matice P_π čtvercová matice $n \times n$ daná předpisem:

$$(P_\pi)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \pi(i) = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

[1] Využijeme půlení, neboť $a^n = \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2$. Pokud tento algoritmus neznáte, zkuste si rozmyslet detaily.

Tedy je to nula-jedničková matice, která má v každém řádku přesně jednu jedničku na pozici $(i, \pi(i))$.

Příklad. Ukážeme si dva příklady. Pro $n = 5$ mějme permutace π a σ dané následujícím předpisem (v druhém řádku je zapsáno, kam se čísla zobrazují):

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tyto permutace mají permutační matice P_π a P_σ (s vynechanými nulami):

$$P_\pi = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 1 & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad P_\sigma = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Pro permutační matice vyřešte následující:

Úloha 2.1. Proč se permutačním maticím říká permutační? Uvažte, co permutační matice provádí s maticí A (pochopitelně správné velikosti), pokud ji násobí zleva či zprava.

Úloha 2.2. Permutační matice stejné velikosti lze násobit. Pro libovolné n-prvkové permutace π a σ má $P_\pi P_\sigma$ smysl. Ukažte, že součin permutačních matic je opět permutační matice a objevte, v jakém je vztahu k permutacím π a σ.

Úloha 2.3. Permutační matice mají plnou hodnost, $\operatorname{rank}(P_\pi) = n$. Tedy vždy existuje inverzní matice. Zjistěte pro libovolnou permutaci π, jak vypadá inverzní matice P_π^{-1}.

Úloha 2.4. Ukažte, že pro libovolnou permutační matici P_π existuje mocnina $k \geq 1$, že $P_\pi^k = I_n$. Jaká je nejmenší možná hodnota k?

3 Matice Pascalova trojúhelníku (20 bodů)

Část Pascalova trojúhelníku můžeme zapsat do matice $n \times n$ třemi způsoby: L_n je dolní trojúhelníková matice, U_n je horní trojúhelníková a S_n má zapsaný Pascalův trojúhelník po diagonálách. Formálně, pokud číslujeme prvky matice od 0 do $n - 1$:

$$(L_n)_{i,j} = \binom{i}{j}, \qquad (U_n)_{i,j} = \binom{j}{i}, \qquad (S_n)_{i,j} = \binom{i+j}{i},$$

kde pochopitelně $\binom{i}{j} = 0$ pro nesmyslné hodnoty $j > i$.

Příklad. Například pro $n = 5$ vypadají matice takto (s vynechanými nulami):

$$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ & & & 1 & 4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3.1. Jak bude vypadat součin $L_5 U_5$?

Úloha 3.2. Zobecněte získaný výsledek a popište součin $L_n U_n$. Pochopitelně pokud odvodíte obecný vztah, nemusíte řešit předchozí úlohu.

Nápověda. Zkuste objevit co nejvíc důkazů. Lze si součin rozepsat formálně pomocí definice součinu a vzpomenout si na sumy kombinačních čísel. Další možné řešení je provést Gaussovu eliminaci vzniklé matice $L_n U_n$ a udělat její LDU dekompozici. Co budou asi matice L a U? Za každý různý důkaz budou další body (různost posuzuje cvičící :)).