Lineární algebra III – 1. přednáška 7.10.2013 $\boxed{5}$

Opakování LA1, z trochu jiného úhlu a nadhledu

> Lineární algebra je o studiu vektorových prostorů a lineárních zobrazení (transformací).

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

„zachovává strukturu"

„v algebře homomorfismus

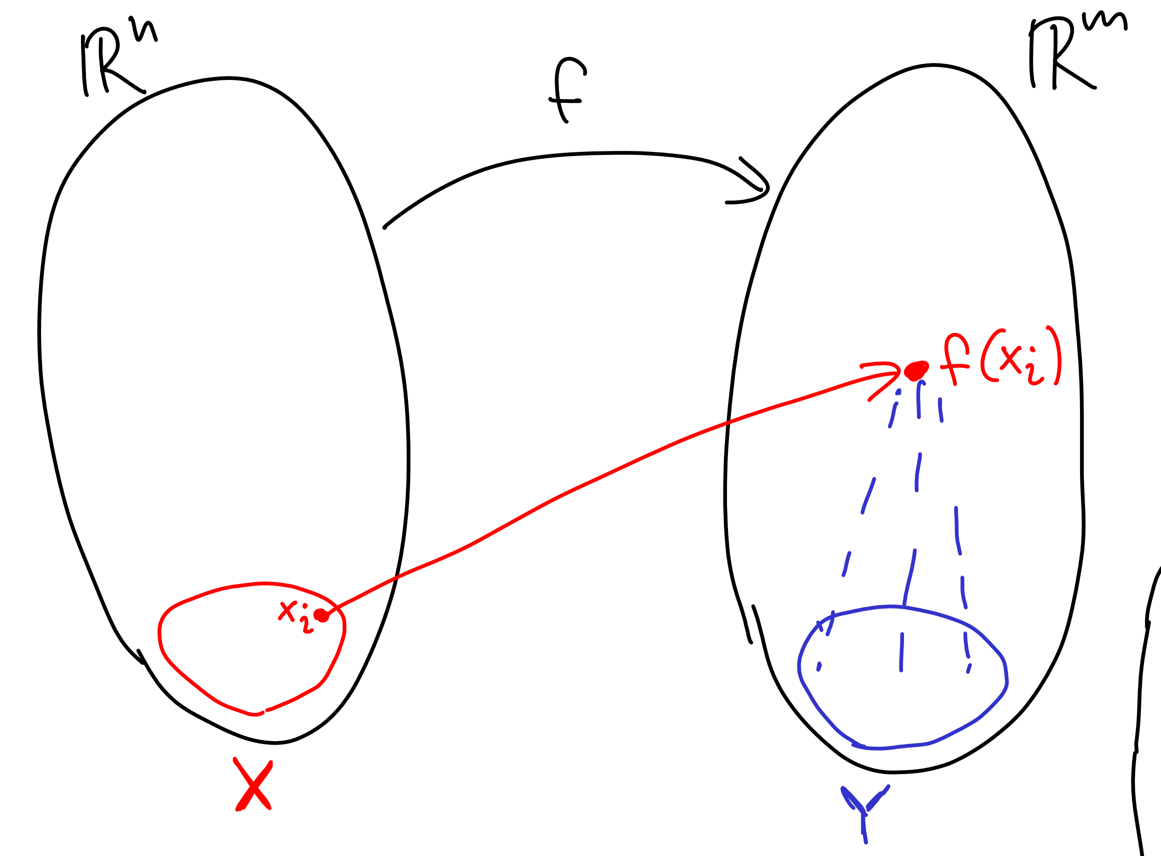
MATICE

- Jeden možný pohled: „tabulka reálných čísel"
- Pro mě osobně klíčové:

MATICE je reprezentace lineárního zobrazení.

Proč?

$f\left(\sum \alpha_i x_i\right) = \sum \alpha_i f(x_i)$, tedy k popsání celého lin. zobrazení stačí znát obrazy libovolné báze, zbytek je už určený.



Zvolíme si dvě báze X a Y.

Každý vektor $f(x_i)$ lze popsat pomocí m souřadnic vůči bázi Y.

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

což JE MATICE $m \times n$.

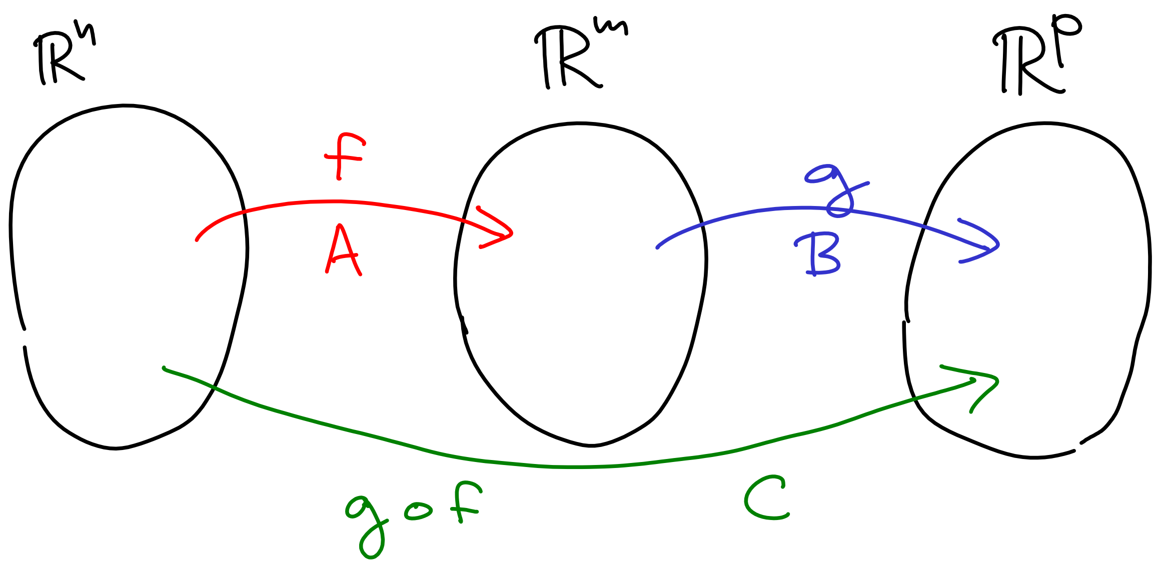
Zapíšeme je do sloupečků vedle sebe.

$\boxed{6}$ Když si to člověk rozepíše, dostane následující (doporučuji vyzkoušet jako cvičení):

- Vektory zobrazujeme tak, že je násobíme A zleva, tedy $f(x) = Ax$ a $f : x \mapsto Ax$.

- Proto pro nalezení vzorů b, tedy $f^{-1}(b)$, musíme vyřešit soustavu $Ax = b$.

- Skládání lin. zobrazení odpovídá násobení matic:

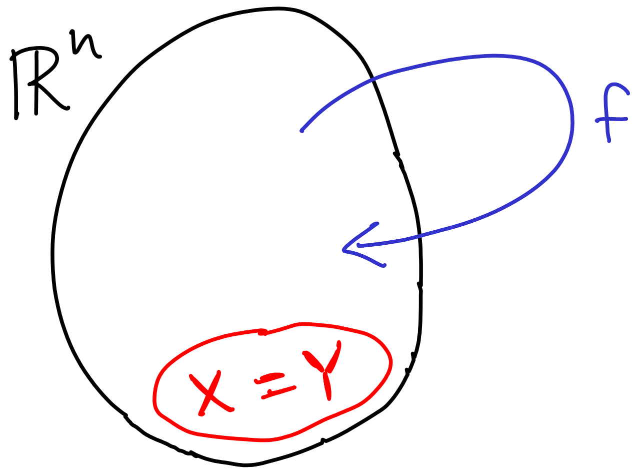


$$C = BA.$$

Proto lze násobit pouze matice, které sdílejí jeden rozměr.

- Inverzní lin. zobrazení f^{-1} nemusí existovat. Pokud ale existuje, je reprezentováno vůči stejným bazím inverzní maticí A^{-1}.

- Pokud je lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, typicky volíme $X = Y$ a někdy se f nazývá lineární operátor.



Fundamentální podprostory matice A

Podprostory $\mathbb{R}^n$:

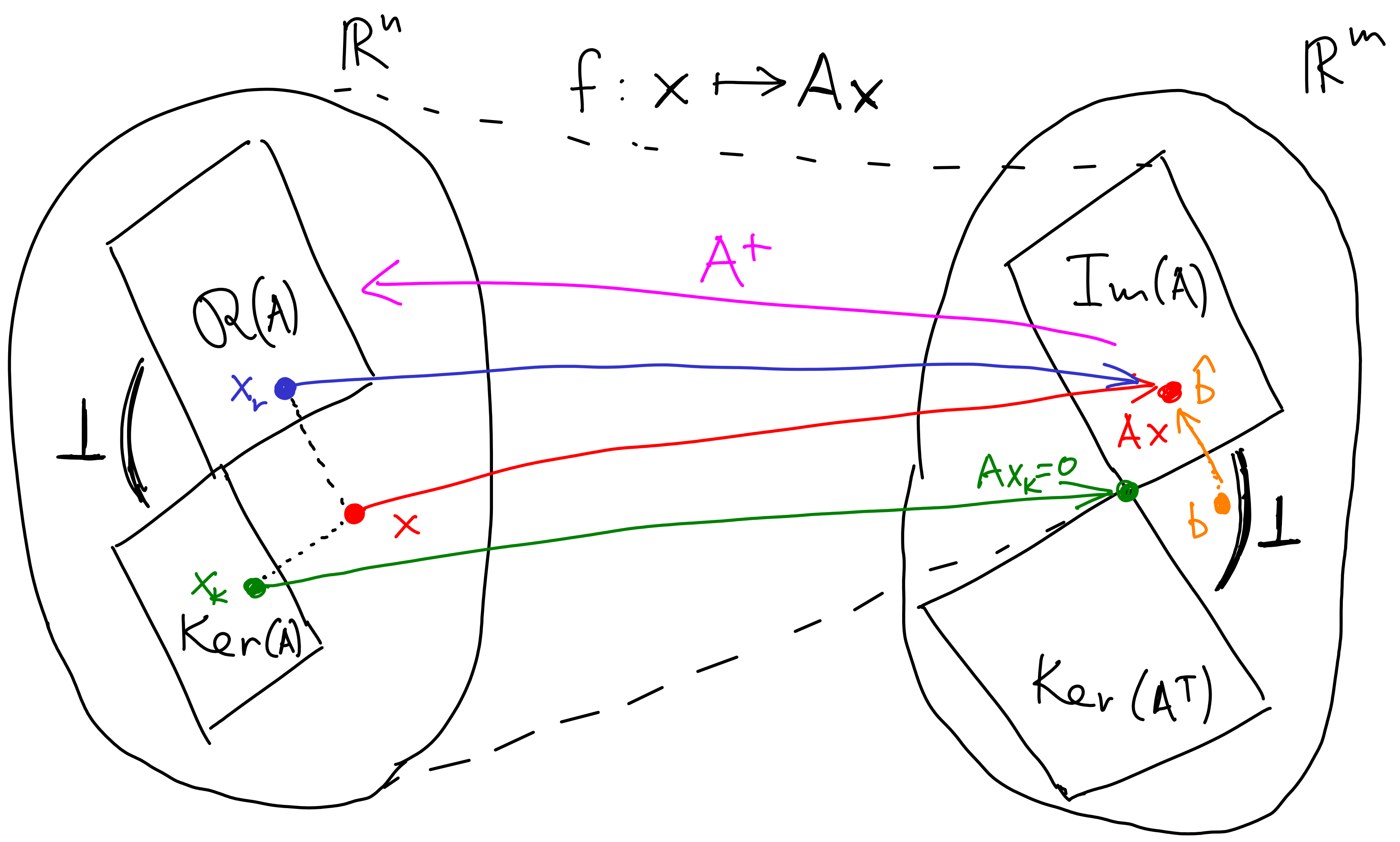
- kernel $\mathrm{Ker}(A)$,
- řádkový prostor $\mathcal{R}(A)$.

} ortogonální doplňky

Podprostory $\mathbb{R}^m$:

- image $\mathrm{Im}(A)$ neboli sloupcový prostor $\mathcal{R}(A^T)$,
- levý kernel $\mathrm{Ker}(A^T)$.

} opět ortogonální doplňky



- Není těžké dokázat, že $f \restriction \mathcal{R}(A)$ je isomorfismus, a tedy $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.
- Informace z $\mathrm{Ker}(A)$ je zobrazením f ztracena, tedy pro $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$ neexistuje inverze f^{-1}!

  Ale můžeme alespoň invertovat $\mathrm{Im}(A)$ do $\mathcal{R}(A)$, a toto se nazývá pseudoinverze A^+.
- Když $b \notin \mathrm{Im}(A)$, $Ax = b$ nemá řešení. Lze ale kolmou projekcí získat nejbližší $\hat{b}$, pro které řešení existuje: Metoda nejmenších čtverců.

8 KAŽDÁ MATICE POPISUJE PROCES

Lze využít technik lineární algebry k pochopení.

$G=(V,E)$ je graf. $|V|=n$, $|E|=m$

- Matice sousednosti A_G

  Proces procházky nad grafem:

  $A_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $\quad (A_G x)_i = \sum_{j \in N(i)} x_j$,

  tedy A_G sčítá ohodnocení sousedů.

- Matice incidence I_G

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\qquad\qquad e \qquad\qquad\qquad\qquad}^{m} \\ n\left\{\begin{array}{c} \\ \\ u \\ \\ \\ v \\ \\ \end{array}\right. & \begin{pmatrix} & 0 & & \\ & 0 & & \\ \cdots & 1 & & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \\ \cdots & -1 & & \\ & 0 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

  $I_G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

  $I_G^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

  Zvolíme libovolnou orientaci. $\quad u \xrightarrow{e} v$

Transformujeme ohodnocení hran na ohodnocení vrcholů a naopak.

Cvičení: Jak vypadají fundamentální podprostory matice I_G? Kombinatorická interpretace? Dimenze?

Lze třeba dokázat Eulerovu větu pro rovinné grafy, zvolením jiné báze prostoru cyklů.

- Laplaceova matice L_G $\qquad (L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(i) & i=j, \\ -1 & ij \in E, \\ 0 & ij \notin E. \end{cases}$

  Diskretizace Laplaceova operátoru.

  Jak moc se ohodnocení vrcholů liší od sousedů?