Lineární algebra III – 2. přednáška 14.10.2013

Metoda konečné mřížky a úvod do vlastních čísel

Jedna z metod diskretizace diferenciálních rovnic, která vede na soustavu $Ax=b$.

Uvažme Laplaceovu rovnici $\Delta f = 0$.

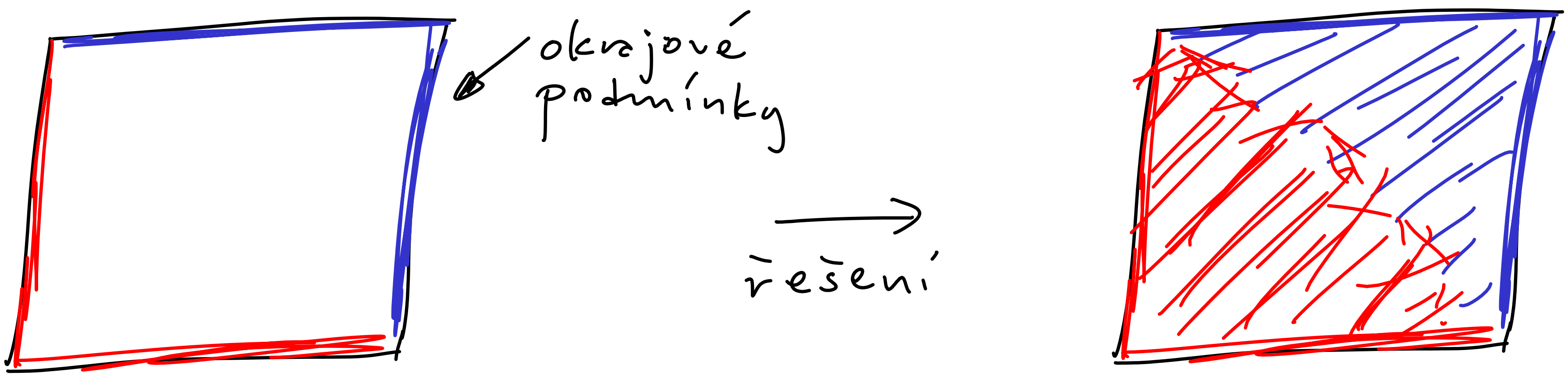
Laplaceův operátor $\Delta f = \nabla\cdot\nabla f \overset{v\ \mathbb{R}^n}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\dots+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

divergence gradientu

Toto popisuje, jak se gradient průměrně chová na okolí bodu, tedy jak moc se hodnota $f(x_1,\dots,x_n)$ odlišuje od průměrných hodnot na okolí.

Klíčový význam ve fyzice (šíření tepla, elektromag.):

Teplota se průměruje na teplotu okolí. Potom řešení $\Delta f = 0$ (třeba s okrajovými podmínkami) odpovídá ustálenému stavu v distribuci teplot (equilibrium).



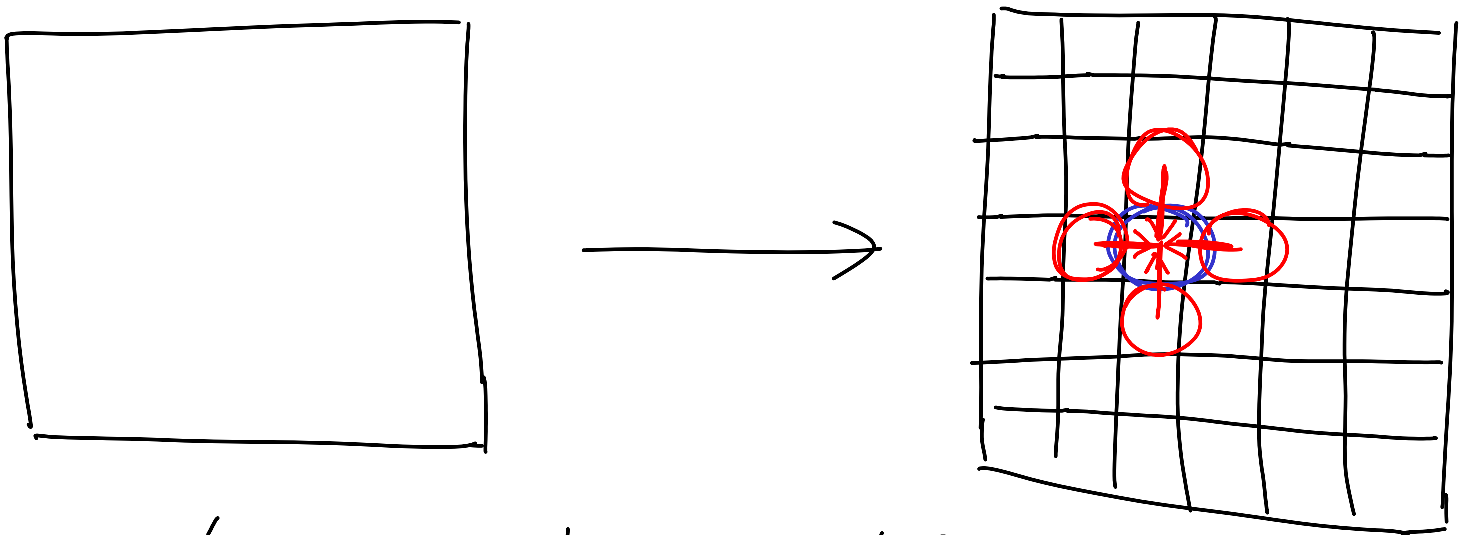
Nebo obecněji Poissonova rovnice $\Delta f = g$ hledá řešení s předepsaným tokem (teplot).

Tyto rovnice mají řadu přirozených aplikací.

$\boxed{10}$ Problém je, že nejsou většinou analyticky vyřešitelné.

Proto lze provést diskretizaci a vyřešit soustavu.

Metoda konečné mřížky: Nasekáme prostor na malé kousky. Každý kousek má konstantní teplotu a její změna závisí pouze na teplotách okolních kousků.



Z derivací se stanou diference, proměnných je pouze konečný počet $\Rightarrow$ soustavu lineárních rovnic.

přerácené znaménko!

Z Laplaceova operátoru $-\Delta f$ se stane Laplaceova matice grafu mřížky (ale obecně lze aproximovat nepravidelně).

$$L_G = \begin{pmatrix} d_1 & & -1 \\ & \ddots & -1 \\ -1 & & \\ \cdot 1 & & d_n \end{pmatrix}, \qquad (L_G \cdot x)_i = d_i x_i - \sum_{ij \in E} x_j =$$

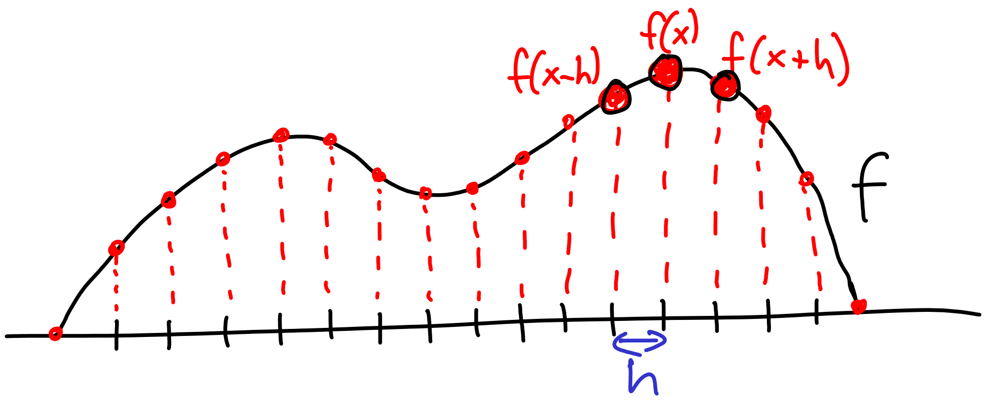
$$= d_i \left(x_i - \frac{1}{d_i} \sum x_j \right).$$

O kolik se liší x_i od průměru x_j na sousedech.

Odvození matice pro cestu:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+\frac{1}{2}h) - f'(x-\frac{1}{2}h)}{h} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$



Zajímá nás hodnota funkce pouze v některých bodech.

Tedy $-f''(x) = b(x)$ vede na $L_G x = b$.

Mimochodem soustavy z těchto diskretizací jsou typicky řídké, tedy obsahují hodně nul.

Jeden z fundamentálních problémů numeriky je:
Jak tohoto využít?

$$-\begin{pmatrix} 1&1&1&1&\cdots&1\\ 1&1&&&O&\\ 1&&1&&&\\ 1&&&1&&\\ \vdots&&O&&\ddots&\\ 1&&&&&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gaussova eliminace}} \begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\ 0&0&&&-1&\\ 0&&0&&&\\ 0&&-1&0&&\\ \vdots&&&&\ddots&\\ 0&&&&&0\end{pmatrix}$$

Řidkost ztracena.

Iterační nepřímé metody, například:
CG: x je aproximováno Krylovovým podprostorem
$$\langle b, Ab, A^2 b, \dots, A^{k-1} b \rangle.$$

Motivace pro studium vlastních čísel.

Co jsou vlastní čísla?
- Kořeny char. polynomu $\det(A-\lambda I)$.
- Řešení rovnice $Ax = \lambda x$ pro $x \neq 0$.

λ … vlastní číslo, x … vlastní vektor

Toto je lepší, i když nevíme nic o existenci.

To je ale hrozně nejasné. Víme, že jich je n, ale co to znamená?

Představme si, že by pro matici A existovala báze vlastních vektorů $x_1, \dots, x_n$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(1.) Nejkrásnější možná báze pro lin. zobrazení reprezentované maticí A.

$$A = S D S^{-1}, \quad \text{kde } S = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Zobrazení se chová diagonálně vůči této bázi.

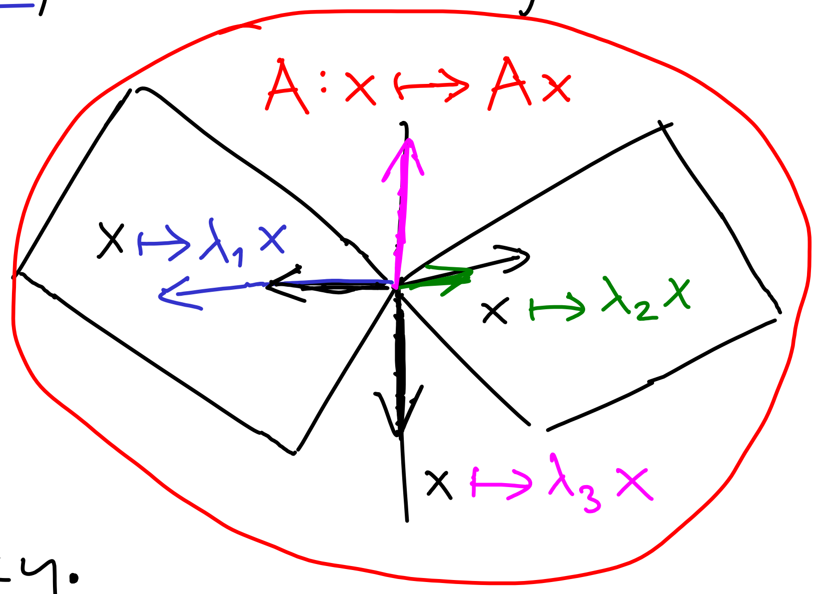
(2.) Vývoj lineárního systému $y_{k+1} = A y_k$.

Kdyby y_0 byl vlastní vektor $\Rightarrow y_k = \lambda^k \cdot y_0$.

Obecně $y_0 = \sum \alpha_i x_i$, tedy

$$y_k = A^k y_0 = A^k \sum \alpha_i x_i = \sum \alpha_i \lambda_i^k x_i.$$

$\boxed{12}$ Existence této báze umožňuje rozložit zobrazení na nezávislé části, na kterých se chová jednoduše.



Příklad:

Matice A velikosti 5×5, s vlastními čísly $2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$.

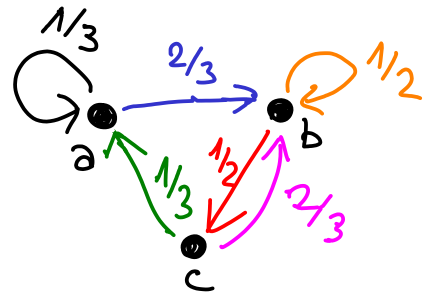
Aplikace na náhodné procházky.

Lze reprezentovat maticí A pravděpodobností.

Krok procházky $\mathbf{p} \longmapsto A\mathbf{p}$, kde $\mathbf{p}$ je vektor pravd. distribuce.

Obecně Markovský proces.

Třeba rovnoměrně nad grafem, kdyby byl k-regulární, potom je $A = \frac{1}{k} A_G$.



$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & & & \\ b & & & \\ c & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{pmatrix} 1/3 & & 1/3 \\ 2/3 & 1/2 & 2/3 \\ & 1/2 & \end{pmatrix}$$

Kdybychom znali vlastní vektory a vlastní čísla, umíme určit vývoj systému $A^n\mathbf{p} = \sum \alpha_i \lambda_i^n \mathbf{x}_i$.

Spektrální radius $\rho(A) = \max |\lambda_i|$.

V limitě $\lim_{n \to \infty} A^n\mathbf{p}$ převládne největší exponciela $\Rightarrow$ skoro vždy záleží pouze na hodnotě $\rho(A)$.

$$\boxed{\rho(A) \begin{cases} > 1 & A^n\mathbf{p} \to \infty, \text{ diverguje.} \\ = 1 & A^n\mathbf{p} \to \times \text{ nebo osciluje, obecně složité.} \\ < 1 & A^n\mathbf{p} \to 0, \text{ konverguje.} \end{cases}}$$

Pro stochastické procesy $\rho(A) = 1$ a podle Perron–Frobeniovy věty distribuce konverguje do ustáleného stavu.

Pro k-reg. graf je to $(1/n, \dots, 1/n)$ a rychlost podle rozdílu $|\lambda_1| - |\lambda_2|$.