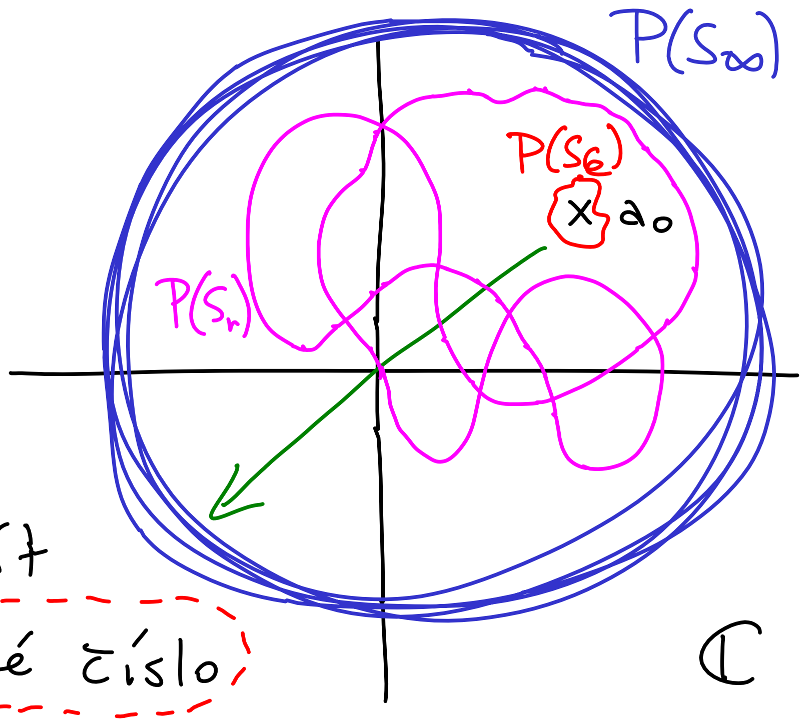
Lineární algebra III – 3. přednáška 21.10.2013

Zavedení vlastních čísel bez determinantů
(podle S. Axler: Down with Determinants)

Protože existence vl. čísla je ekvivalentní s existencí kořenu komplexního polynomu, začneme tradičně:

Věta: $\exists z \in \mathbb{C}$, že $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$.

Důkaz: Topologicky, využijeme spojitost polynomu. Obrazem spojité křivky je spojitá křivka. Nechť S_r je kružnice v komplexní rovině o poloměru r. BÚNO $a_0 \neq 0$, jinak $z = 0$ je kořen.



- Pokud r je dostatečně malé ε, platí $P(z) \approx a_0$. Tedy $P(S_\varepsilon)$ je omotaná okolo a_0.
- Podobně pokud je r velké, $P(z) \approx a_n z^n$, tedy $P(S_\infty)$ n-krát obmotá počátek.

„∞" = hodně velké číslo

Pokud spojitě měníme poloměr $\varepsilon \to \infty$, přejde $P(S_\varepsilon)$ spojitě v $P(S_\infty)$, a tedy někdy protne nulu $\Rightarrow$ existuje kořen $P(z) = 0$. $\square$

Věta: Pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existuje vlastní číslo.

Důkaz: Uvažme Krylovův podprostor pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{u}$: $\langle \mathbf{u}, A\mathbf{u}, A^2\mathbf{u}, \dots, A^n\mathbf{u} \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$. Tyto vektory nemohou být lin. nezávislé, tedy existuje $a_n A^n \mathbf{u} + \dots + a_1 A\mathbf{u} + a_0 I\mathbf{u} = 0$.

14

Polynom $a_n z^n + \dots + a_0 z^0 = 0$ lze rozložit na součin kořenů: $c(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)=0$.

Protože A a I komutují, platí:

$$0 = a_n A^n u + \dots + a_1 A u + a_0 I u = c(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I)u.$$

Protože $c, u \neq 0$, $\exists (A-\lambda_i I)$ s netriviálním kernelem

$\Rightarrow \lambda_i$ je vlastní číslo matice A. $\square$

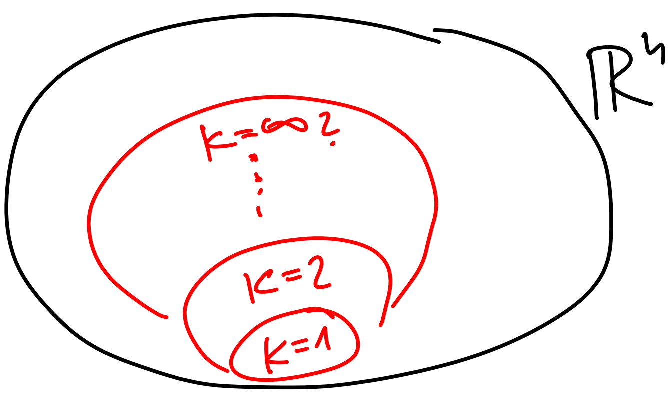
Tím vlastně máme všechno, co jsme získali díky determinantu, ale zbývá ukázat, jak geometricky vlastní vektory vypadají.

Pro dané vlastní číslo tvoří jeho vlastní vektory podprostor $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Lze snadno dokázat, že tyto podprostory jsou nezávislé.

Vlastních vektorů však nemusí být dost, aby se z nich dala vytvořit báze, třeba $A = \begin{pmatrix}1&1\\&1\end{pmatrix}$ má vlastní číslo pouze jedno $\lambda=1$, ale $\operatorname{Ker}(A-I)$ je přímka. Proto zavedeme zobecněné vlastní vektory, které už dají bázi.

Definice: Vektor $u \neq 0$ je zobecněný vlastní vektor k vlastnímu číslu λ, pokud $\exists k$, že $u \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^k$.

$\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^k \subseteq \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^{k+1}$.



Lemma: Stačí uvažovat $k \leq n$.

Důkaz: Nechť u je zobecněný vl. vektor pro λ a k, a nechť k je minimální takové.

Potom platí $k \leq n$, neboť vektory

$$u, (A-\lambda I)u, \ldots, (A-\lambda I)^{k-1}u \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

To lze snadno ukázat. Nechť

$$a_0 u + a_1 (A-\lambda I) u + \cdots + a_{k-1} (A-\lambda I)^{k-1} u = 0,$$

potom násobením $(A-\lambda I)^{k-1}, \ldots, (A-\lambda I)^2$ postupně ukážeme, že $a_0, \ldots, a_{k-2}$ jsou nulové, tedy komb. je triviální.

$\square$

Tedy nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ jsou všechna po dvou různá vlastní čísla, označme jejich zobecněné vlastní vektory $U_i := \operatorname{Ker}(A-\lambda_i)^n$ (stačí n podle lemmatu). Opět lze ukázat, že $U_1, \ldots, U_\ell$ jsou lineárně nezávislé.

Věta: Podprostory $U_1, \ldots, U_\ell$ generují celý prostor.

Důkaz: Indukcí podle n, zjevně pravda pro $n=1$. Podle lemmatu existuje pro A vlastní číslo λ. Trik je využít trochu netypicky kernel a image $(A-\lambda I)^n$ (pro čtvercové matice jsou oba podprostory $\mathbb{R}^n$).

Tvrdíme: $$\overbrace{\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^n}^{V_K} \oplus \overbrace{\operatorname{Im}(A-\lambda I)^n}^{V_I} = \mathbb{C}^n.$$

Obecně platí $\dim(\operatorname{Ker}) + \dim(\operatorname{Im}) = n$. Stačí tedy ukázat lineární nezávislost podprostorů.

Nechť $u \in V_K \cap V_I$, potom z definice platí:

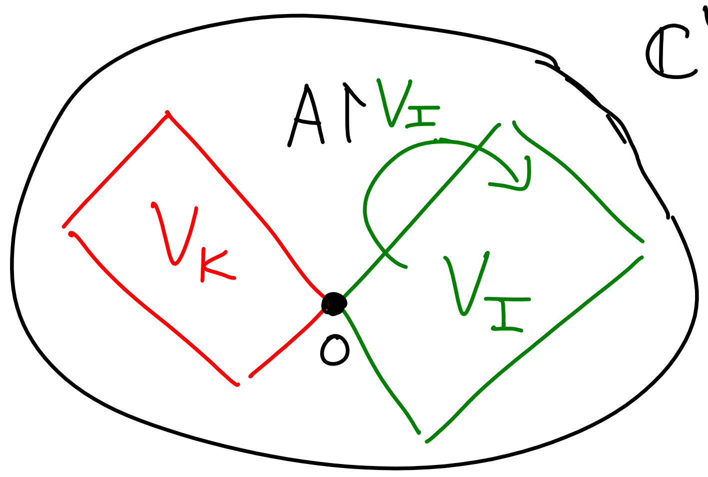
$$(A-\lambda I)^n \cdot u = 0 \quad \text{a} \quad \exists v, \text{ že } \quad (A-\lambda I)^n \cdot v = u.$$

Ale potom $(A-\lambda I)^{2n} \cdot v = 0$, tedy v je zobecněný vlastní vektor. Proto podle lemmatu platí $(A-\lambda I)^n \cdot v = 0$, a tedy $u = 0$. Tvrzení dokázáno.

Nyní $\dim(V_K) \geq 1$ (neboť ∃ vlastní vektor), proto $\dim(V_I) < n$. Důkaz dokončíme využitím indukčního předpokladu na $A \restriction V_I$.

Abychom toto mohli udělat, musíme ukázat, že

$$A \restriction V_I : V_I \longrightarrow V_I.$$



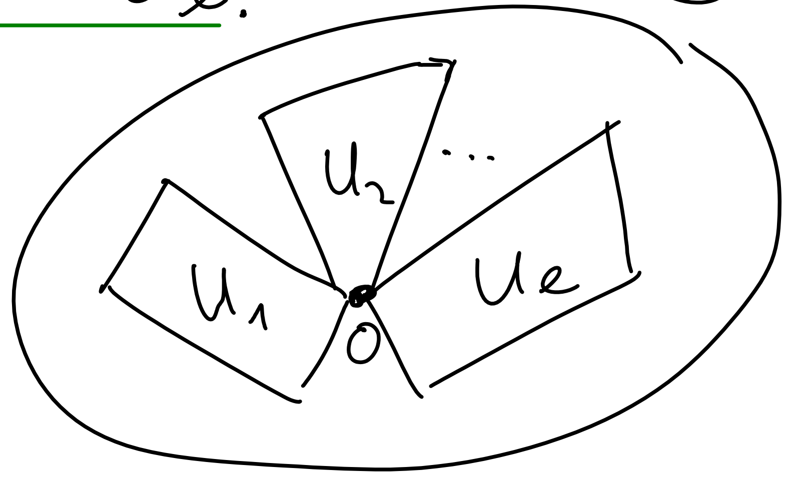
To je ale pravda, neboť operátory komutují:

$$A \cdot (A-\lambda I)^n = (A-\lambda I)^n \cdot A.$$

Tedy nechť $x \in V_I$, $\exists y \in \mathbb{R}^n$, že $(A-\lambda I)^n y = x$. Platí $Ax = A \cdot (A-\lambda I)^n y = (A-\lambda I)^n \cdot A y = (A-\lambda I)^n \cdot z$, tedy $Ax \in V_I$.

Proto z indukce má $A \restriction V_I$ zobecněné vlastní vektory generující V_I, a tedy spolu s V_K generují zob. vlastní vektory A celý $\mathbb{C}^n$. □

Proto platí, že $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_\ell$.



Algebraická násobnost vlastního čísla λ_i je $\dim(U_i)$; součet násobností je vždy n.

Lze snadno zvolit bázi ze zobecněných vlastních vektorů, na každém U_i volíme báze induktivně rozšiřováním:

$$\overset{\text{báze}}{\mathrm{Ker}(A-\lambda I)} \Rightarrow \overset{\text{báze}}{\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \overset{\text{báze}}{\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^n}.$$

Vůči této bázi B se zobrazení A chová jednoduše:

$$A = B \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & ? \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & ? \\ & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_e & ? \\ & \ddots & \\ & & \lambda_e \end{matrix}} \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

B obsahuje vektory báze po sloupcích.

Zavedení char. polynomu a determinantu:

Dokončíme bez důkazu, nejprve zavedeme minimální polynom matice A. Protože $A \in \mathbb{C}^{n^2}$, $\exists$ minimální k takové, že

$$\boxed{A^0, A^1, A^2, \dots, A^k \text{ jsou lineárně závislé.}}$$

Tedy $\exists$ jediná netriv. lineární kombinace

$$a_0 A^0 + a_1 A^1 + \dots + a_{k-1} A^{k-1} + 1 \cdot A^k = 0.$$

Potom minimální polynom A je

$$\boxed{p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k.}$$

Platí pro něj $p(z) = (z-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (z-\lambda_e)^{\alpha_e}$, kde $\alpha_i \leq n$ je nejmenší přirozené číslo, že $\operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} = U_i$.

Zjevně $p(A)=0$, a pokud libovolný polynom $q(A)=0$, potom q je násobek p.

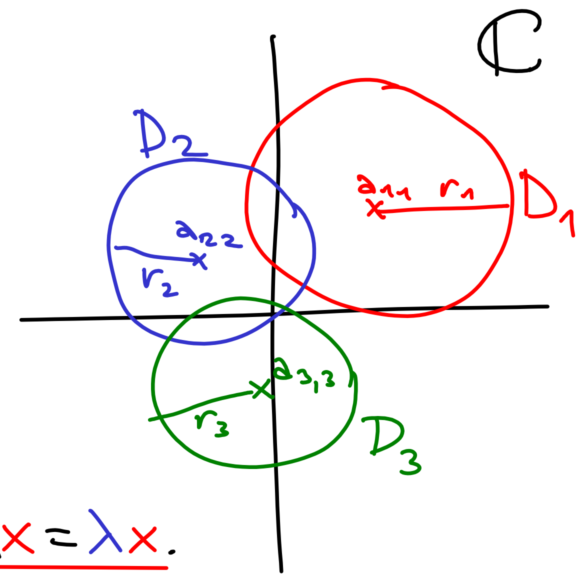
Charakteristický polynom: $c(z) = (z-\lambda_1)^{\beta_1} \cdots (z-\lambda_e)^{\beta_e}$, kde $\beta_i = \dim(U_i)$ a platí $\alpha_i \leq \beta_i$. Proto platí Cayley-Hamiltonova věta, že $c(A) = 0$.

Determinant: $\det(A) := \prod \lambda_i^{\beta_i}$, a platí $c(A) = \det(A - zI)$.

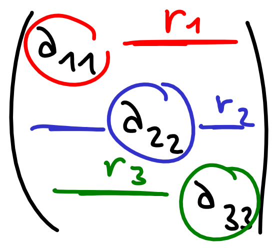
18 Další důležité vlastnosti vlastních čísel.

Je docela těžké je spočítat, ale často stačí odhad:

Gershgorinova věta o discích:



Nechť D_i jsou disky v $\mathbb{C}$ se středy v a_{ii} a poloměry $r_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Potom $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.



Důkaz: Pokud λ je vlastní číslo, $\exists x$, že $Ax = \lambda x$.

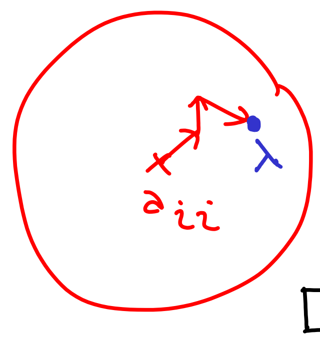
Existuje složka x_i, které je největší, BÚNO $x_i = 1$ a $|x_j| \le 1$.

Potom $\lambda \in D_i$, protože

Rotuje a možná zkrátí.

$$\lambda = (Ax)_i = a_{ii} + \sum_{j\neq i} x_j \cdot a_{ij}.$$

Proto se můžeme od a_{ii} vzdálit nejvíc r_i, tedy $\lambda \in D_i$.



□

Rozšíření na komponenty disků: Pokud komponenta $\bigcup D_i$ obsahuje k disků, je v ní k vlastních čísel.

Důkaz: Topologicky, vlastní čísla se spojitě mění v koeficientech matice. Spojitá transformace z diagonální části matice D do plné matice A:

$$A(t) = tA + (1-t)D; \quad t \in [0;1].$$

$D \xrightarrow{t} A$. Trajektorie λ_i v čase.

Vlastní čísla začnou v bodech na diagonále a spojitě se hýbou v t. Ale nikdy nemohou přeskočit mezi komponentami.

□

Důkaz podobný jako důkaz hlavní věty, akorát maličko složitější.

Dekompozice

diagonalizace: $A = SDS^{-1}$, když $\exists$ báze z vlastních vektorů.

Jordanova forma: $A = SJS^{-1}$ z buněk $\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$, existuje vždy.

Schurův rozklad: $A = QUQ^T$, existuje vždy s ortog. bází.

Spektrální rozklad: $A = QDQ^T$, když A je normální:
$A^*A = AA^*$, kde A^* je transpozice.