Lineární algebra III – 4. přednáška 4.11.2013

Dva světy lineární algebry – exaktní a ten numerický

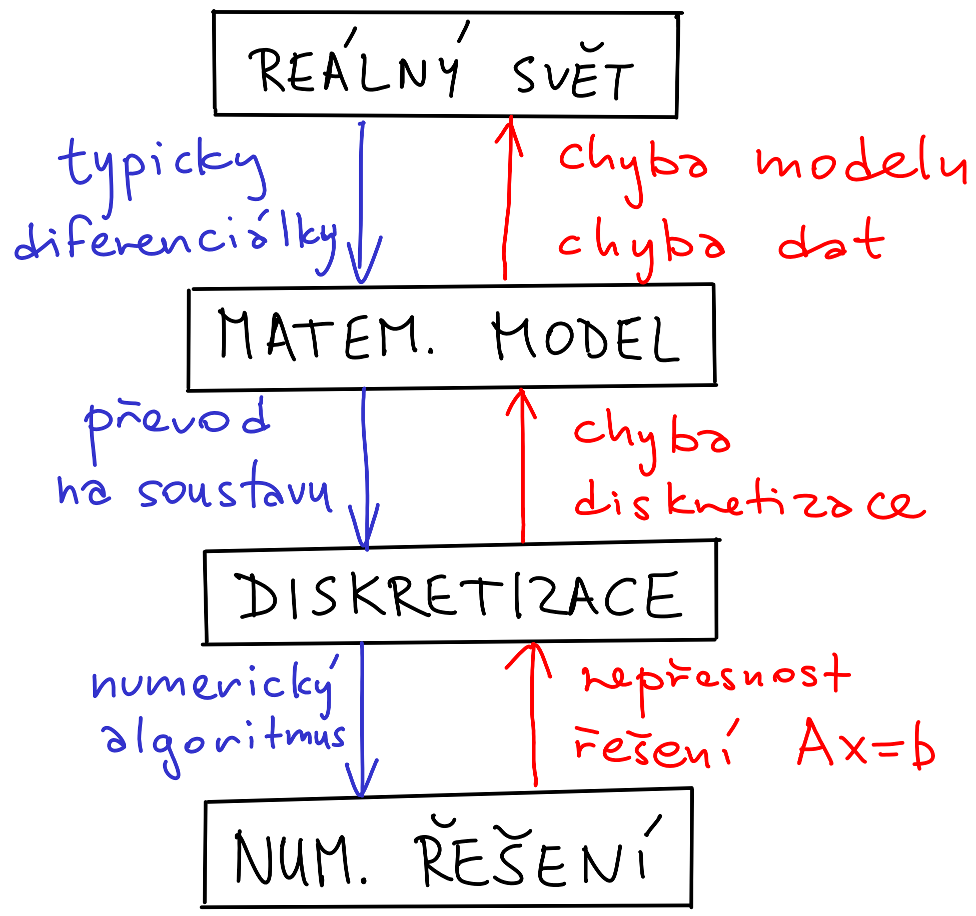
Počítáme se zaokrouhlováním, a chceme být schopni analyzovat velikost chyby.

Pro to jsou dva důvody:

1) Je to rychlejší a jednodušší.

2) Nepotřebujeme přesně vyřešit problém s nepřesným zadáním.

Typické aplikace:



Prakticky se navíc počítá s floaty, které jsou složité.

Zakladatel numerické lineární algebry Wilkinson pochopil chyby při Gaussově eliminaci, v jeho Ph.D. práci.

Ukázka numerického algoritmu – Wilkinsonův iterativní refinement (počítáme v malé přesnosti, vyřešíme ve velké).

$A\hat{x} \approx b.$ vyřešíme nepřesně

$r = b - A\hat{x}.$ residuum (chyba ve zkoušce)

Dokud $\|r\|$ není malá:

$Az \approx r.$ oprava chyby

$\hat{x} := \hat{x} + z.$ oprava řešení

$r = b - A\hat{x}.$ update residua

Ale my nechceme malé residuum, ale malou chybu $e = x - \hat{x}$, kde $Ax=b$ je přesné řešení.

Jaký je vztah mezi chybou a residuem?

20 Odbočka: Proč je tak důležitá spojitost v analýze?

Kontrola nad velikostí chyby: Chyba $|f(x)-f(x+\epsilon)|$ pro dostatečně malou hodnotu ϵ je libovolně malá.

Tedy pokud $\hat{x} \to x$, potom $f(\hat{x}) \to f(x)$.

Pochopitelně pro výpočty potřebujeme mít i odhad, jak rychle. Pro $f(x)=Ax$ je residuum $r = A\cdot e = f(e)$.

Číslo podmíněnosti matice:

Mějme nepřesně vyřešenou soustavu $A(x+\delta x) = b + \delta b$, tedy $A\delta x = \delta b$. (δx není $\delta \cdot x$, značí to libovolný vektor malé normy). Chceme odhadnout $\|\delta x\|$ v závislosti na $\|\delta b\|$.

Předpokládejme, že A je diagonalizovatelná, s vlastními čísly uspořádanými $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

I A^{-1} je diagonalizovatelná, s vlastními čísly $\frac{1}{\lambda_i}$.

$\delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow$ Tedy jak moc A^{-1} může natáhnout vektor? Nejvíc ve směru vlastního vektoru s největším vlastním číslem. Platí $\|\delta x\| \leq \frac{1}{|\lambda_n|} \cdot \|\delta b\|$. Číslo podmíněnosti??

Ne úplně...

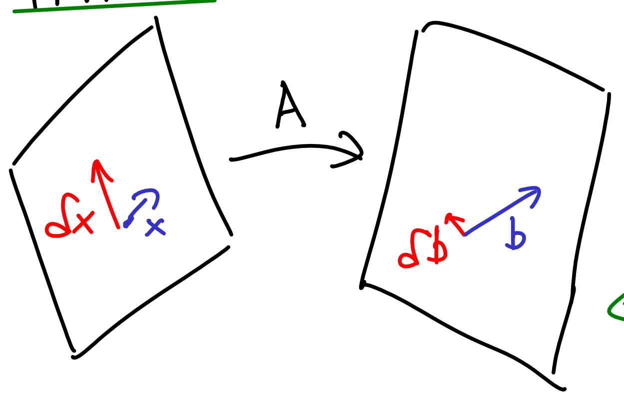
Nefunguje dobře, mění se s měřítkem!

$\to$ A a $1000A$ by se chovala numericky jinak, ale to je hloupost. Musíme uvažovat relativní změny:

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.}$$

Opravdové číslo podmíněnosti.

Příklad:



Číslo podmíněnosti $k(A)$ je alespoň 6.

BÚNO $\|x\| = 1$. Potom minimalizujeme $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ vůči $\|\delta x\|$

→ minimalizací $\|\delta b\|$ .... $\frac{1}{|\lambda_n|}$ jako předtím.

→ maximalizací $\|b\|$ .... x je vlastní vektor pro největší vlastní číslo $|\lambda_1|$.

Proto $k(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$ pro diagonalizovatelnou matici A.

Obecně potřeba jiný odhad:

Třeba pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ & 1 \end{pmatrix}$ a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ & 1 \end{pmatrix}$ je

číslo podmíněnosti $k(A)$ zhruba 10000, ne $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = 1$.

Vlastní vektory neukazují v extrémních směrech.

Maticové normy – Podobně jako u vektorů, zavádějí geometrii nad prostorem matic (velikosti, vzdálenosti, ...). Axiomy:

$$\boxed{1)\ \|A\| \geq 0 \text{ a } \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0. \quad 2)\ \|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|. \quad 3)\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.}$$

Norma se nazývá multiplikativní, pokud $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Jsou dva typy norem, které se typicky používají:

Koeficientové – matice jako vektory s n^2 koeficienty.

Například Frobeniova norma: $\|A\|_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{nn}^2}$.

Operátorové – jak moc matice natahují vektory.

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$ pro libovolnou vektorovou normu $\|\cdot\|_p$.

Budeme značit $\|A\|_2$ typicky pomocí $\|A\|$. Nyní můžeme určit číslo podmíněnosti pomocí operátorové normy.

22 Předchozí analýza zafunguje bez problémů, akorát místo největších vlastních čísel A a A^{-1} dostaneme normy:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \quad \text{tedy} \quad k(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|.$$

Kvůli multiplikativitě vždy platí $k(A) \geq 1$.

Lze udělat obecnější analýzu i s chybou v matici:

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b,$$

kde dostaneme po výpočtu, s předpokladem $\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\| < 1$:

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).}$$

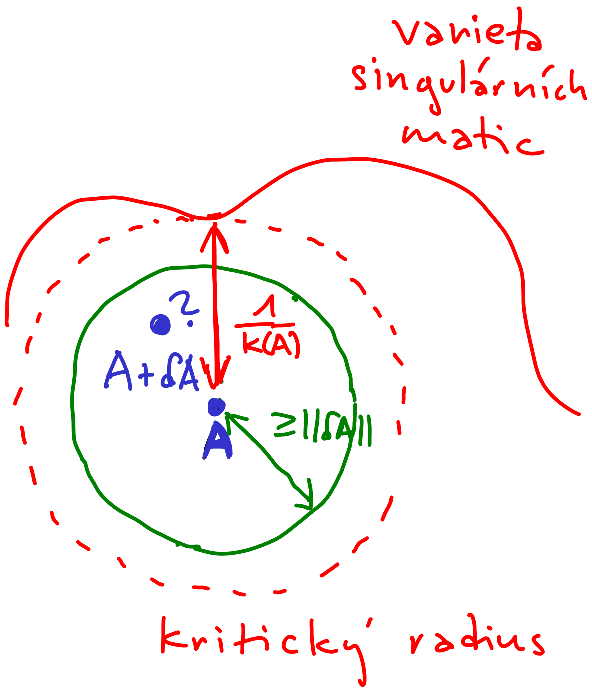
Tyto odhady jsou pesimistické, běžně chyba má strukturu.

Geometrický pohled na číslo podmíněnosti:

Uvažme prostor všech matic, v geometrii dané normou.

Během výpočtu zavádíme chybu do matice:
$A \longrightarrow A+\delta A$, kde $\|\delta A\|$ postupně roste.

Pokud známe pouze odhad $\|\delta A\|$, dostáváme kouli možných matic. Pokud by $A+\delta A$ mohla být singulární, potom můžeme dostat libovolný vektor x jako řešení soustavy, tedy numericky vyjde libovolně velká chyba.



Číslo podmíněnosti udává vzdálenost od nejbližší singulární matice:

Věta:
$$\boxed{\min\left\{\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} : A+\delta A \text{ je singulární}\right\} = \frac{1}{k(A)} = \frac{1}{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}.}$$