

Singulární rozklad matice SVD

Motivace: Co je to numerický rank?

Problém je, že rank je nespojitý v koeficientech matice, tedy malá perturbace ho může hodně změnit. Numerický rank je hodnota ranku, která je zachována při zvolené perturbaci, jejíž velikost závisí na situaci. SVD odhalí num. vlastnosti matice, jinak nelze se singulárními maticemi pracovat. Třeba Gaussovka nemá jak odhalit nulový koeficient od malého pivotu.

SVD je zobecnění spektrálního rozkladu:

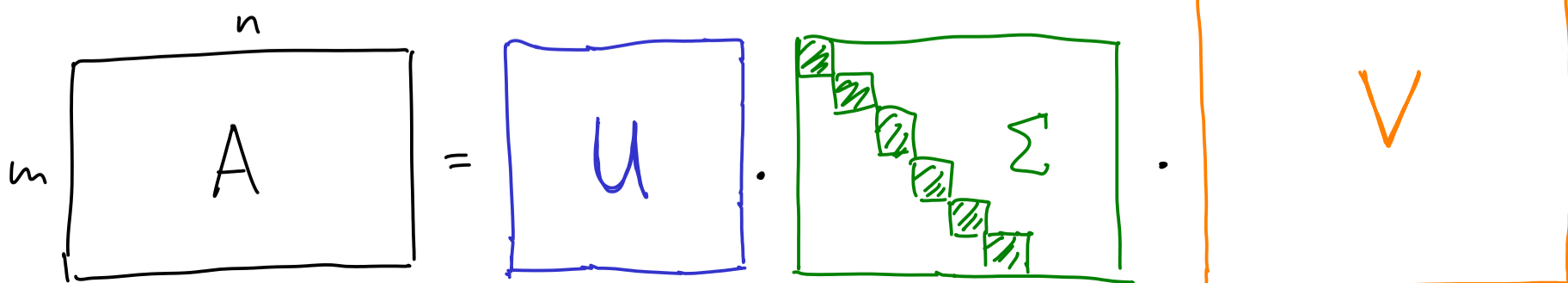
$A = Q\Lambda Q^T$ existuje pouze pro normální matice, na druhou stranu diagonalizace nebo Jordanova forma se nedá udělat numericky přesně.

Proto slevíme a budeme mít dvě různé ortogonální matice. Pak platí:

Věta: Pro kždou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existuje

SVD rozklad $A = U \Sigma V^T$ ← ortogonální $n \times n$

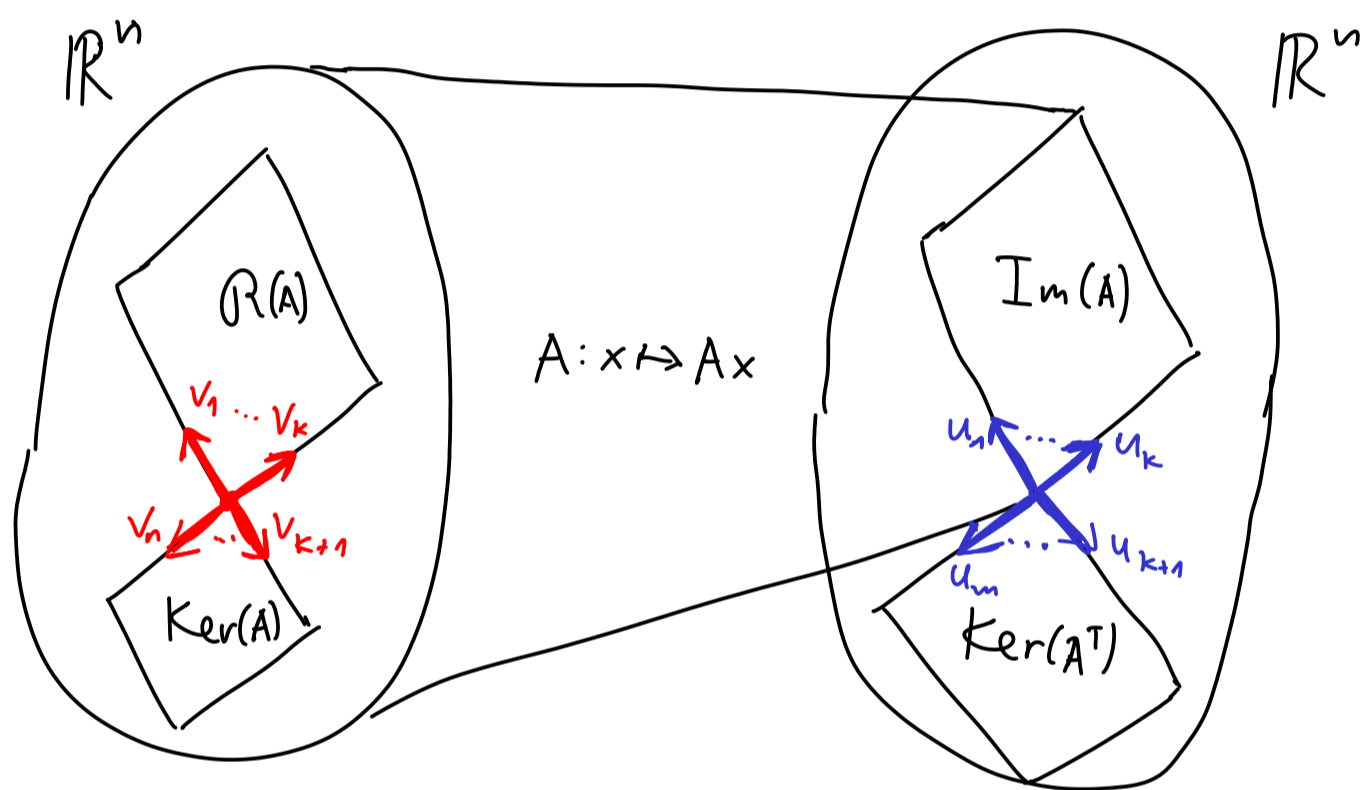
↑ ortogonální $m \times m$ ↑ diagonální $m \times n$



[28] V matici Σ je obsažena úplná numerická informace o matici A . Prvky na diagonále G_i se nazývají singulární hodnoty, volí se typicky všechny pozitivní, utříděné podle velikosti:

$$G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_n \geq 0.$$

SVD vznikne geometricky volbou dvou ortogonálních bazí v \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m :



Volba v kernelech je libovolná, ale v $R(A)$ a $Im(A)$ platí

$$A v_i = G_i \cdot u_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Obdobna rovnice pro vlastní čísla $Ax = \lambda x$.

První důkaz SVD: BÚNO $m \geq n$, indukcí dle velikosti.

Zjevně pravda pro $n=1$. Podobně pokud $A=0$, SVD existuje.

Proto $\|A\| > 0$ a existuje $\|A v_1\| = \|A\| \cdot \|v_1\|$. Zvolme

$$\|v_1\| = 1, \quad u_1 := \frac{A v_1}{\|A v_1\|} \quad \text{a} \quad G = \|A\|; \quad \text{platí} \quad A v_1 = G \cdot u_1. \quad \text{Zbytek indukcí.}$$

Doplňme na ortogonální báze libovolně:

$$U_1^T = \begin{pmatrix} \overline{u_1^T} \\ \tilde{U}_1^T \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \tilde{V}_1 \end{pmatrix}$$

Nyní, kdyby $A = U_1 \Sigma V_1^T$ byla hledaná SVD,
 $U_1^T A V_1$ by byla diagonální.
To je pouze zástěčně!

$$U_1^T A V_1 = \begin{pmatrix} u_1^T A v_1 & u_1^T A \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_1^T A v_1 & \tilde{u}_1^T A \tilde{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & -0- \\ | & \\ 0 & \tilde{u}_1^T A \tilde{v}_1 \\ | & \end{pmatrix}$$

Protože, kdyby to nebyla 0, dostaneme spor s $\|A\| = G$.

multiplik. rovnou

$$G = \|A\| = \|U_1^T A V_1\| \geq \|(1, 0, \dots, 0)^T U_1^T A V_1\| = \|(G | u^T A \tilde{v}_1)\| > G.$$

Protože $\tilde{u}_1^T \cdot A \cdot v_1 = G \cdot \tilde{u}_1^T \cdot u_1 = 0$

kvůli ortogonalitě báze U_1 .

Označme $A_2 = \tilde{u}_1^T A \tilde{v}_1$, z indukčního předpokladu existuje

SVD rozklad $\Sigma_2 = U_2^T A_2 V_2$. Proto platí

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & U_2^T \end{pmatrix} \cdot U_1^T \cdot A \cdot V_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & \\ & \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

Tedy dostáváme SVD matice A. \square

Druhý důkaz SVD: Využijeme toho, že matice $A^T A$ a $A A^T$ jsou symetrické, normální, PSD, tedy mají spektrální rozklady. Ortogonalní báze: $A^T A v_i = \lambda_i v_i$.

Platí z ortogonality: $v_j^T A^T A v_i = \lambda_i v_j^T v_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{pro } i=j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$

BÚNO necht' $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n$ a označme $A v_i = \sqrt{\lambda_i} u_i$; potom u_1, \dots, u_k tvoří také ortogonalní bázi. Doplněním u_i na ortogonalní bázi $\text{Ker}(A^T)$ získáme SVD matice $A = U \Sigma V^T$, $G_i = \sqrt{\lambda_i}$. \square

Aplikace SVD a užitečné vlastnosti.

- Rozepsáním $A = U \Sigma V^T$ po členech dostáváme $A = \sum_{i=1}^k G_i \cdot u_i v_i^T$ ← Součet k 1-rankových matic. (Navíc definované ortogonalními bázemi.)
- Pokud $\exists A^{-1}$, je SVD inverze: $A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T$ (čtvercová inverze $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_1} & & \\ & \dots & \\ & & \frac{1}{G_n} \end{pmatrix}$)
- Podobně lze pro libovolnou matici vyrobit pseudoinverzi

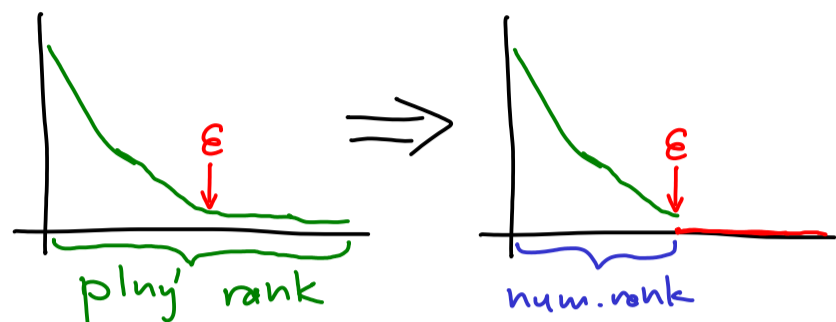
30] A^+ , která zobrazuje $\text{Im}(A)$ na $\mathcal{R}(A)$: $A^+ = V \Sigma^+ U^T$.

• $\|A\| = \|U \Sigma V^T\| = \|\Sigma\| = \sigma_1$, a tedy $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

Podobně pěkně se chová Frobeniova norma.

• Rank matice A je počet nenulových singulárních hodnot. Numerický rank je počet singulárních hodnot $\sigma_i \geq \epsilon$.

• Nejbližší matice A_k ranku k vznikne z A vynulováním $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$:



Důkaz: $\|A - A_k\| = \left\| U \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \dots & \\ & & \sigma_{k+1} & \\ & & & \dots \\ & & & & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot V^T \right\| = \sigma_{k+1}$.

Zbývá ukázat, že žádná matice B ranku k není blíže.

$\dim \text{Ker}(B) = n - k$, uvažme podprostor $\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle$, existuje jednotkový vektor h v průniku:

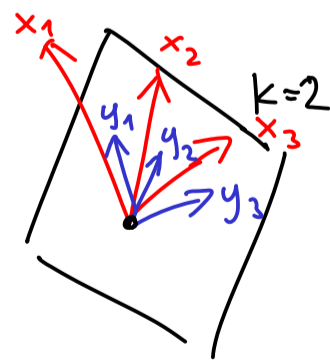
$$\|A - B\| \geq \|(A - B)h\| = \|Ah\| = \|U \Sigma V^T h\| = \|\Sigma(V^T h)\| = \left\| \Sigma \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

kde $\|h\| = 1$. Potom ale $\|\Sigma a\|$ je minimalizována

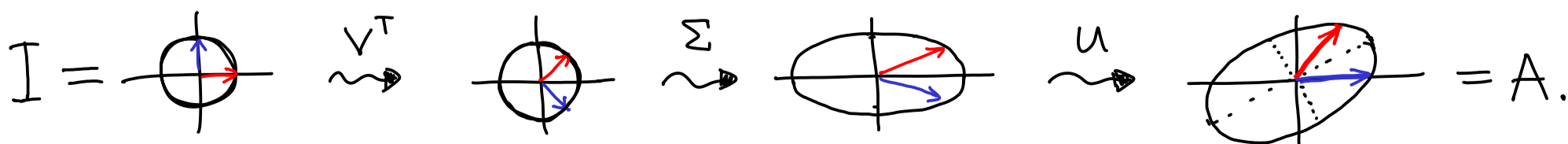
pro $a = e_{k+1}$, a tedy $\|\Sigma(V^T h)\| \geq \sigma_{k+1}$. □

Lze využít například ke kompresi obrázků, protože k uložení A_k stačí paměť $O(kn)$. Nebo odfiltrování šumu.

• S využitím SVD se provádí ve statistice PCA (principal component analysis): Mějme data x_1, \dots, x_n v \mathbb{R}^m . Chceme najít podprostor malé dimenze k , na nějž uděláme kolmou projekci $P x_i = y_i$. Chceme minimalizovat $\sum \|x_i - y_i\|$. Lze udělat pomocí SVD.



• Podle $A = U \Sigma V^T$ je každé lineární zobrazení složení rotace/reflexe, natáčení v osách a další rotace/reflexe.



Geometricky vyobrazeno zobrazení jednotkové kružnice.