17. 2. 2015 – 1. cvičení

Standardní skalární součin a norma

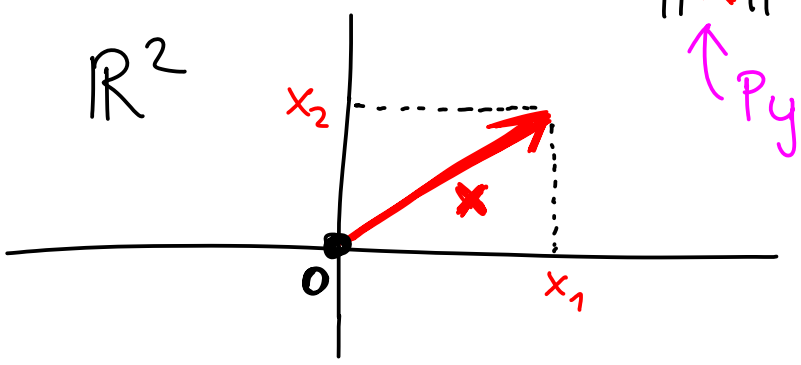
Během několika následujících cvičení chceme zavést pojmy jako <u>délka vektoru a kolmost.</u>

↑ neboli ortogonalita

Délka v $\mathbb{R}^n$ (standardní norma):

$\mathbb{R}^1$ $\quad \|\mathbf{x}\| = |x_1|.$

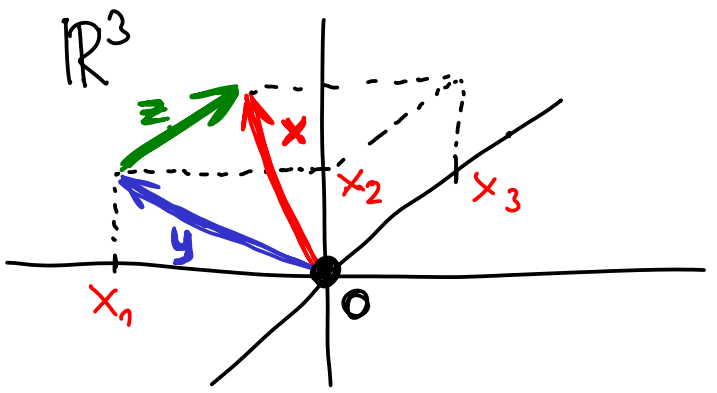
$\mathbb{R}^2$



$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

↑ Pythagorova věta

$\mathbb{R}^3$



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2} = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^2 + x_3^2}$$

↑ Pythagorova věta

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Obecně v $\mathbb{R}^n$:

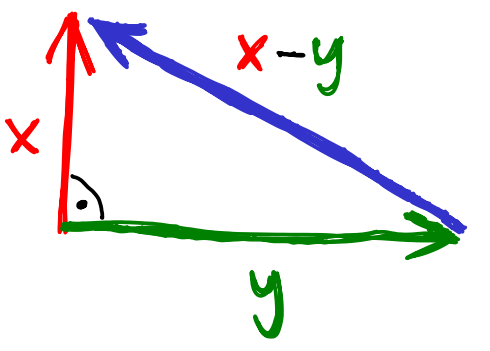
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

↑ Důkaz indukcí podle n, podobně jako při kroku $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Ortogonalita: Kdy jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ kolmé?

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff$ platí <u>Pythagorova věta v trojúhelníku:</u>

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$



$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$$

$$0 = -2x_1y_1 - \cdots - 2x_ny_n,$$

neboli $\quad \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0.$

8 Tento výraz se nazývá standardní skalární součin $x^T y$. Popisuje, jak moc vektory ukazují společným směrem:

$$x^T y \begin{cases} = 0 & \text{kolmost (žádný společný směr),} \\ > 0 & \text{ostrý úhel mezi } x \text{ a } y, \\ < 0 & \text{tupý úhel mezi } x \text{ a } y. \end{cases}$$

Platí, že $\|x\| = \sqrt{x^T x}$.

Nulový vektor je kolmý na cokoliv.

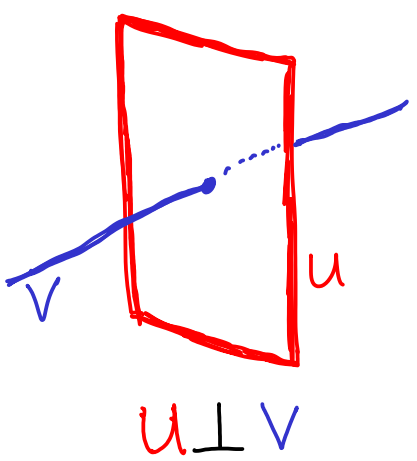
Lemma: Nechť $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $x_i \neq 0$ a $x_i \perp x_j$ pro $i \neq j$. Potom jsou $x_1, \dots, x_k$ lineárně nezávislé.

Důkaz: Nechť $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$, vynásobme zleva x_i^T. Z ortogonality je $\alpha_j x_i^T x_j = 0$, tedy zbývá $\alpha_i x_i^T x_i = \alpha_i \|x_i\|^2 = 0$. Protože $x_i \neq 0$, je $\|x_i\|^2 > 0$, a tedy $\alpha_i = 0$. Protože i můžeme zvolit libovolně, je výše uvedená lineární kombinace $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ triviální. □

Definici ortogonality rozšíříme na podprostory:

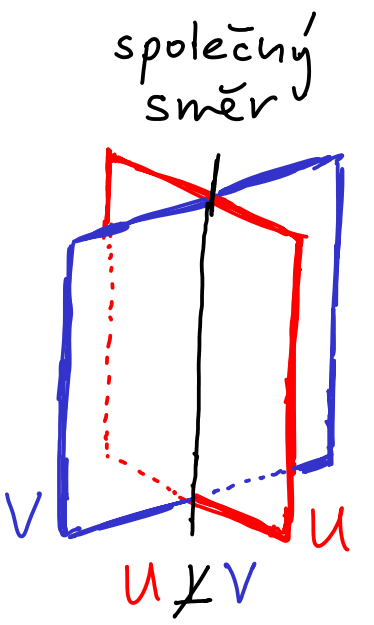
$$U \perp V \iff \forall u \in U, v \in V \quad u \perp v$$

↑ stačí ověřit pro dvě báze



$U \perp V$

Avšak neplatí z běžného jazyka (dvě stěny místnosti jsou na sebe kolmé, ...).



$U \not\perp V$

Ortogonální doplněk: $U^\perp = \{v : \forall u \in U, \; v \perp u\}$.

Ortogonální doplňky mají řadu vlastností:

(i) $U^\perp$ je vektorový podprostor.

(ii) $U \cap U^\perp = \{0\}$, $\langle U \cup U^\perp \rangle = \mathbb{R}^n$, tedy
$\dim U + \dim U^\perp = n$.

(iii) $(U^\perp)^\perp = U$.

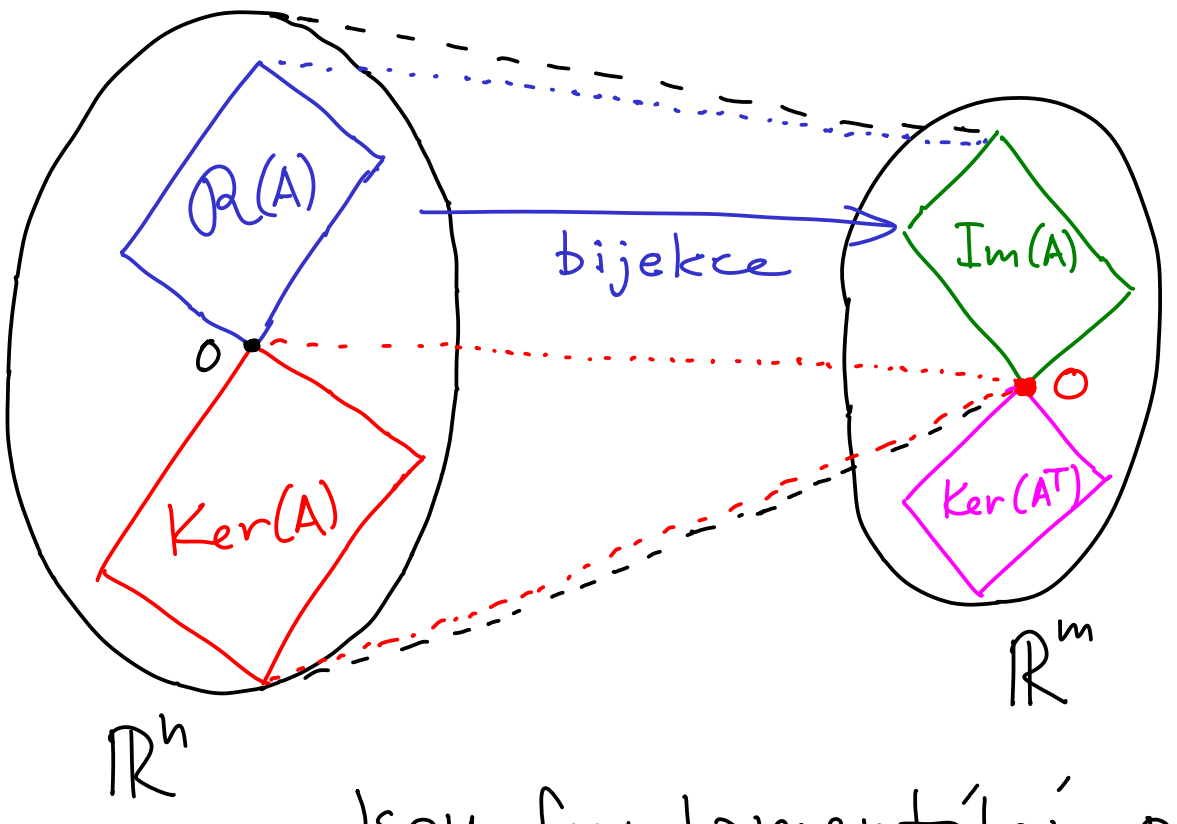
Dokázat vlastnost (i) a první část (ii) je snadné.

Dokažme $(U^\perp)^\perp \supseteq U$: Každý vektor $\mathbf{u} \in U$ je kolmý na $U^\perp$, tedy podle definice patří do $(U^\perp)^\perp$. □

Zbytek zatím nedokážeme, potřebovali bychom vědět, že ortogonálních vektorů je hodně.
Konkrétně nás budou zajímat ortogonální báze:

Pro ně budeme chtít dokázat obdobu Steinitzovy věty, že jich je spousta.
Ukážeme, že libovolnou množinu ortogonálních vektorů lze doplnit na ortogonální bázi.

Fundamentální podprostory matice



- $R(A)$ .... řádkový podprostor,
- $Ker(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$ ... kernel,
- $Im(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ... obraz,
- $Ker(A^T)$ ... levý kernel.

Jsou fundamentální pro pochopení struktury lineárního zobrazení $A : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

10 V minulém semestru jsme dokázali, že $\mathrm{Ker}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$ jsou lineárně nezávislé. Navíc

$$\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n,$$

podobně pro $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{R}(A^T)$ a $\mathrm{Ker}(A^T)$.

Platí však mnohem silnější vlastnost:

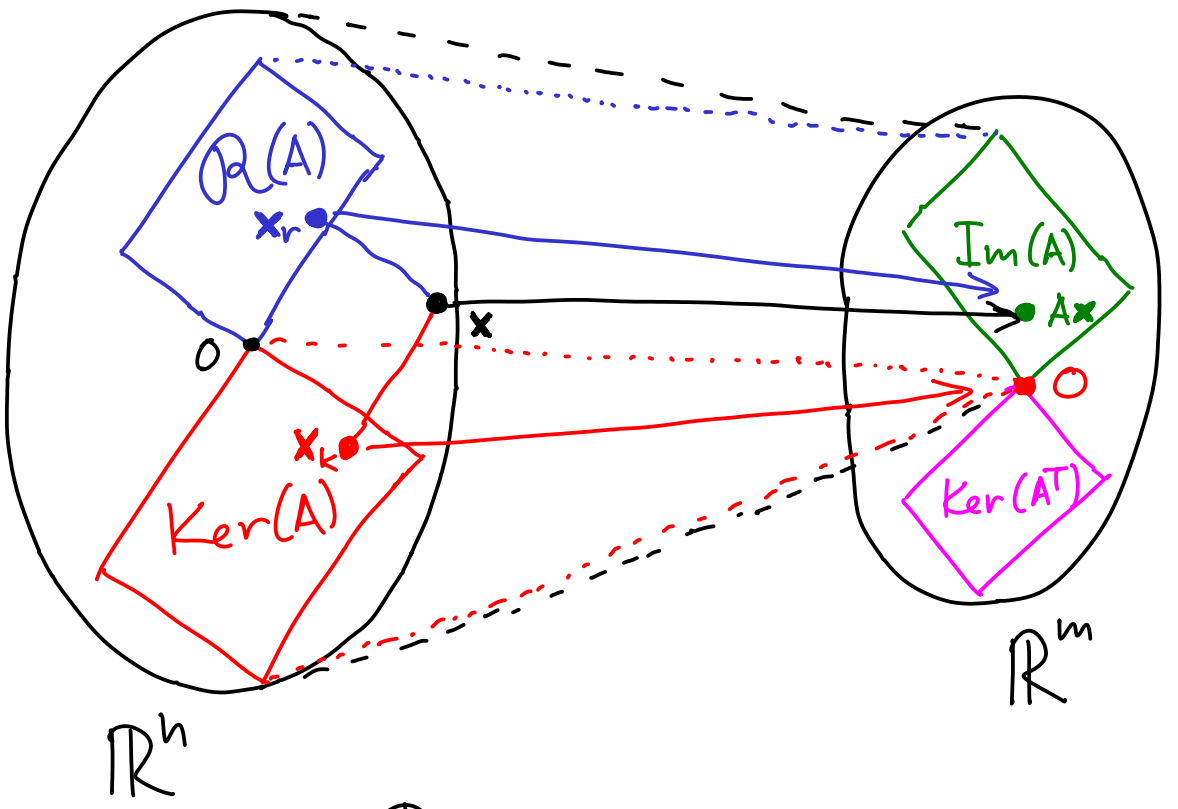
Věta: $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Důkaz: Označme řádky A jako $\mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_m^T$.

Nechť $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$. Podle definice platí $A\mathbf{x} = 0$, tedy

$$\mathbf{u}_1^T\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{u}_2^T\mathbf{x} = 0, \dots, \quad \mathbf{u}_m^T\mathbf{x} = 0.$$

Proto je libovolná lineární kombinace $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(A)$ kolmá na $\mathbf{x}$. Naopak libovolné $\mathbf{x} \perp \mathcal{R}(A)$ patří do $\mathrm{Ker}(A)$. Tedy $\mathcal{R}(A) = \mathrm{Ker}(A)^\perp$ a pro A^T získáme druhou rovnost. □



Pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ lze uvážit ortogonální projekce $\mathbf{x}_r \in \mathcal{R}(A)$, $\mathbf{x}_k \in \mathrm{Ker}(A)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_k$:

$$A\mathbf{x}_r = A\mathbf{x}, \quad A\mathbf{x}_k = 0.$$

Pokud by $A \upharpoonright \mathcal{R}(A)$ nebyla bijekce, potom:

$$\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(A),\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \quad A\mathbf{x} = A\mathbf{y} \Rightarrow A(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0.$$

Tedy $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathcal{R}(A) \cap \mathrm{Ker}(A)$, což je spor.

Proto $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.