24.2.2015 – 2. cvičení

Abstraktní definice skalárního součinu a normy

Opět ilustrujme dva různé způsoby, jak lze definovat matematické objekty:

- konkrétní .... popíšeme konstrukcí, ← typicky první
- abstraktní .... popíšeme pouze vlastnostmi, které objekty musí splňovat.

Standardní skalární součin a norma z minulého cvičení jsou příklady prvního přístupu. Zkusíme z nich vybrat ty správné vlastnosti pro abstraktní definice.

Abstraktní definice: Skalární součin a norma jsou formy, přiřazují vektorům reálná čísla.

Norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ← lineární forma

(i) Linearita: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|.$

(ii) Trojúhelníková nerovnost: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$

(iii) Nezápornost: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0$ a $\|\mathbf{x}\| > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$

Skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ← bilineární forma

(i) Linearita: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \mathbf{x}+\mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle,$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle.$

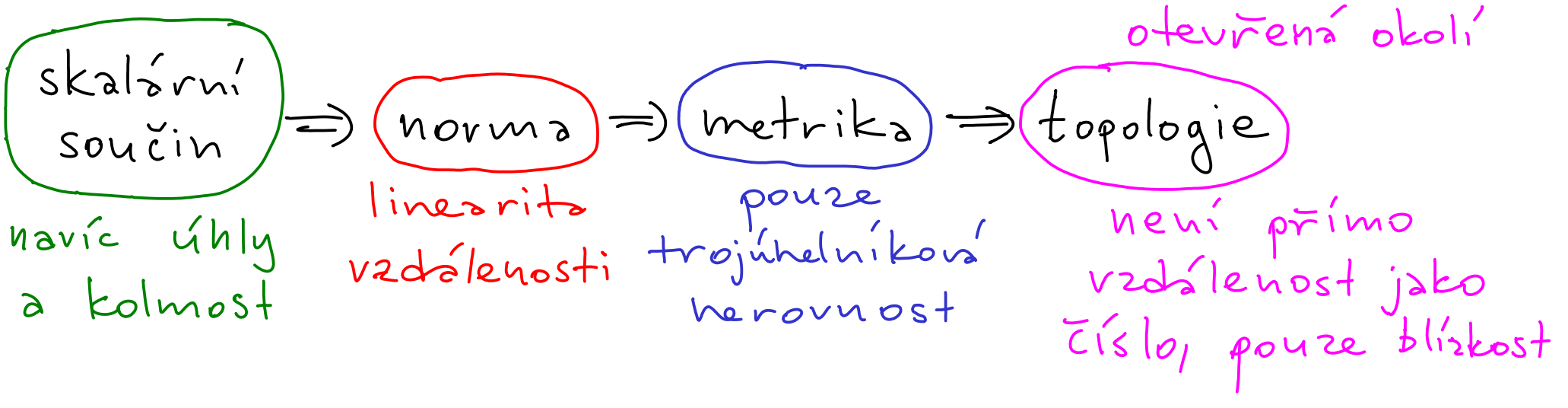
(ii) Symetrie: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle.$

(iii) Pozitivní definitnost: $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$ a $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle > 0$ pro $\mathbf{x} \neq 0.$

Poznámka: V $\mathbb{C}$ neplatí symetrie, ale $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}$, ↖ komplexní sdružení
jinak by neplatilo (iii).

12 Každý skalární součin indukuje normu: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}$.
Nejtěžší je ověřit vlastnost (ii), zatím vynecháme.
Naopak jsou normy, které neodpovídají součinu.

Geometričnost vektorových prostorů:



Charakterizujme nestandardní skalární součiny:

Příklady nestandardního součinu:

1) Zvolme reálná čísla $c_1, \dots, c_n > 0$, potom je
$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum c_i x_i y_i$ skalární součin.

2) Jiný příklad v $\mathbb{R}^2$:
$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$,
vlastnost (iii) platí, neboť
$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 2(2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2) = 2(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2) \geq 0.$

Tyto skalární součiny jdou popsat maticemi jako
$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$ pro vhodnou matici A,
standardní skalární součin je pro $A = I$.

Příklad 1: $A = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ & & & c_n \end{pmatrix}$.

Příklad 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dvě otázky:
1. Pro které matice A je $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalární součin?
2. Je každý skalární součin tohoto typu?

Zaměřme se nejprve na první otázku.

Výraz $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ se obecně nazývá bilineární forma, neboť je to funkce $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a splňuje linearitu (i).

→ Pro symetrii (ii) musí být A symetrická: $A = A^T$.

→ Pro pozitivní definitnost (iii) musí být matice A pozitivně definitní:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \text{pro } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Jak takové matice vypadají zatím řešit nebudeme, ukážeme si ekvivalentní definice na konci textu.

Pozorování: Kdykoliv je A symetrická pozitivně definitní, je $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalární součin.

Věta: Libovolný skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ je roven $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ pro nějakou symetrickou pozitivně definitní matici A.

Důkaz: Pokud známe skalární součin vůči libovolné bázi, je z linearity jednoznačně určen.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum\sum x_i y_j \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle, \text{ kde } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Zvolme A jako Gramovu matici:

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1 | e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1 | e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n | e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n | e_n \rangle \end{pmatrix},$$

platí $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$.

1. Symetričnost A plyne z (ii).
2. Pozitivní definitnost plyne z (iii).

□

14 Pro danou symetrickou pozitivně definitní matici A budeme značit skalární součin $\langle x \mid y \rangle_A = x^T A y$ a příslušnou normu $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$.

Jaký je geometrický význam těchto součinů/norem?

Věta: Matice A je symetrická pozitivně definitní, právě když existuje Choleského rozklad $A = R^T R$, kde R je regulární matice.

↑ důkaz ukážeme na konci textu

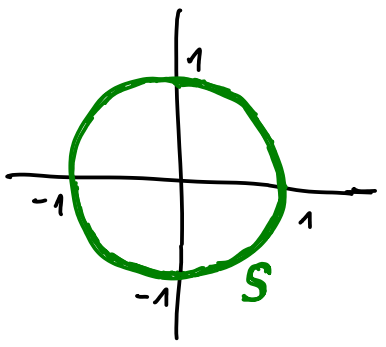
Proto $\langle x \mid y \rangle_A = x^T A y = x^T R^T R y = (Rx)^T (Ry) = \langle Rx \mid Ry \rangle$.
Je to standardní skalární součin vůči jiné bázi, popsané maticí přechodu R. Podobně $\|x\|_A$.

Charakterizace nestandardních norem:
Pokud na libovolné přímce zvolíme normu jednoho nenulového vektoru, je norma na přímce určena z linearity (i). Stačí popsat jednotkovou sféru

$$S = \{ x : x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| = 1 \}.$$

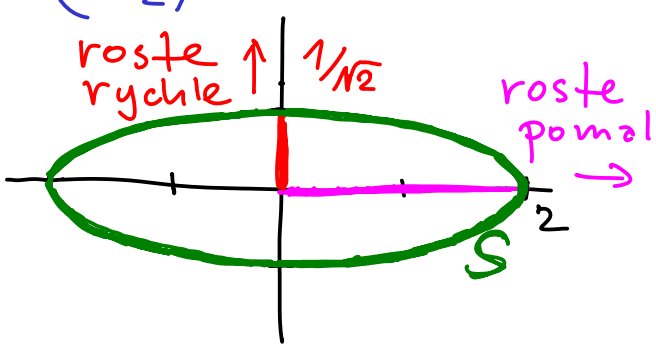
Ukažme příklady v $\mathbb{R}^2$:

standardní norma



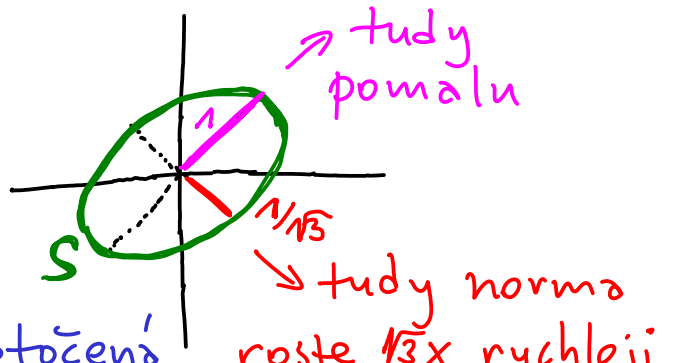
ve všech směrech stejná norma

$\begin{pmatrix} 1/4 & \\ & 2 \end{pmatrix}$-norma



elipsa s osami v kanonických vektorech

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$-norma



pootočená elipsa

Věta: Pro každou A-normu $\|\cdot\|_A$ je jednotková sféra S elipsoid. ← Osy ve směru vlastních vektorů A, budeme probírat později.

↑ Zatím bez důkazu.

Existují ale i další normy, pro $p \neq 2$ nedefinované skalárním součinem:

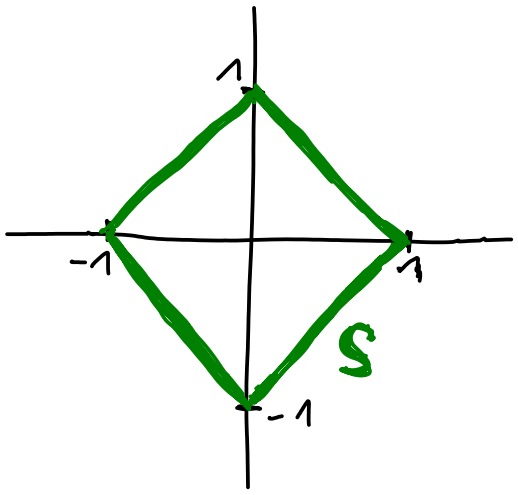
ℓ_p normy: $\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1; \infty].$

→ ℓ_2 je standardní norma,

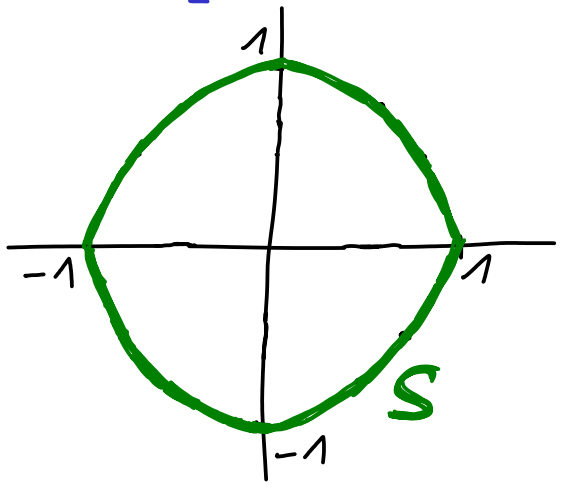
→ ℓ_1 je manhattonská norma $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|,$

→ ℓ_∞ je maximová norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$

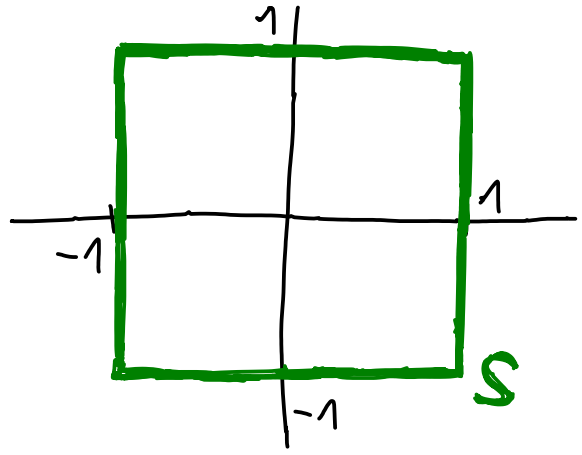
ℓ_1 norma



$\ell_{3/2}$ norma



ℓ_∞ norma



Obecně jednotková sféra může být ještě méně pravidelná. Nechť $\mathbf{B} = \{x : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}.$

Lemma: Pro libovolnou normu platí:

(i) $\mathbf{S}$ obsahuje přesně dva body na každé přímce počátkem,

(ii) $\mathbf{B}$ je symetrická podle počátku,

(iii) $\mathbf{B}$ je konvexní.

Důkaz: (i) vyplývá z linearity a nezápornosti normy.

(ii) vyplývá z linearity pro $\alpha = -1$.

(iii) vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti, čtenář si může rozmyslet. □

Pro libovolné dva vektory $x, y \in S$ platí pro libovolnou konvexní kombinaci, že $\|tx + (1-t)y\| \leq 1$.

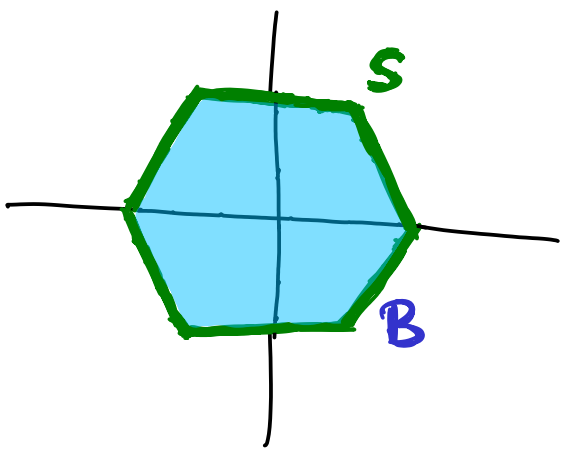
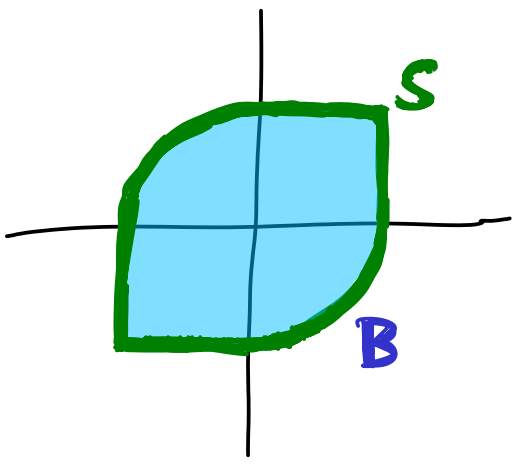
Platí však i obrácená charakterizace:

Věta: Nechť B je uzavřená omezená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, symetrická podle počátku. Nechť S je hranice B, že $0 \notin S$.

Potom je zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované

$$\|x\| = |\alpha|, \text{ kde } x = \alpha y \text{ a } y \in S,$$

norma v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz: Jako cvičení, stačí ověřit vlastnosti (i) až (iii). Nejobtížnější je trojúhelníková nerovnost. □

Příklady obecných norem: