

# Lineární algebra II

Pokročilé cvičení

Pavel Klavík

Peter Zeman

ITI 2015-622

2

Vyrobeno v programu Xournal.

Poděkování studentům pokročilých cvičení.

Podpořeno CE-ITI (GAČR P202/12/G061).

Vydal Matfyzpress,

vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty

Univerzity Karlovy v Praze,

Sokolovská 83, 18675 Praha 8,

jako svou 488. publikaci.

Tisk Reprošředisko UK MFF,

Sokolovská 83, 18675 Praha 8,

© Pavel Klavík (ITI), 2015.

© Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální  
fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2015.

ISBN: 978-80-7378-294-8.

# Obsah:

- 5 ... Předmluva
- 7 ... Standardní skalární součin a norma
- 11 ... Abstraktní definice skalárního součinu a normy
- 17 ... Ortogonální projekce a Cauchy-Schwarzova nerovnost
- 21 ... Ortogonální báze a Gram-Schmidtova ortogonalizace
- 27 ... Metoda nejmenších čtverců a determinanty
- 31 ... Rozvoj, Cramerovo pravidlo, geometrická definice determinantu
- 37 ... Úvod do diferenciálních rovnic a vlastních čísel
- 43 ... Diagonalizace a vlastnosti vlastních čísel
- 47 ... Gershgorinova věta a analýza matic grafů
- 53 ... Schurův a spektrální rozklad matice
- 57 ... Ne normální matice a Jordanova normální forma
- 63 ... Fourierova transformace v řeči lineární algebry
- 67 ... Pozitivně definitní matice: extrémny a energie
- 73 ... Sylvestrova věta o setrvačnosti a minimaxová věta
- 79 ... Literatura

4



## Předmluva

Tyto zápisky vznikly v letním semestru 2014/15, během výuky pokročilého cvičení z lineární algebry. Myšlenka pokročilého cvičení je vytvořit speciální kruh, který se zabývá složitějšími úlohami a problémy lineární algebry. Toto cvičení probíhá na MFF UK již několik let, od roku 2011.

Na pokročilém cvičení se nevěnujeme typickému počítání. Místo toho si studenti zkusí sami lineární algebru vybudovat: vymyslet definice a nalézt důkazy vět (tento proces vymyšlení není v tomto textu zachycen). Tím si studenti vyzkouší, jaké je vytvoření vlastní matematiky. Také si ukazujeme různé aplikace a souvislosti s jinými oblastmi matematiky.

Tento text pokrývá pouze druhý semestr lineární algebry. Pro první semestr je dostupný text Povídání o lineární algebře.

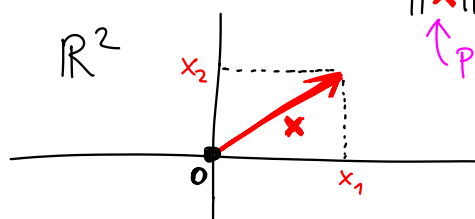
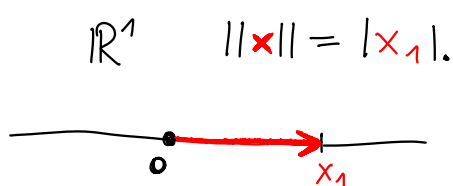
6

## Standardní skalární součin a norma

Během několika následujících cvičení chceme zavést pojmy jako délka vektoru a kolmost.

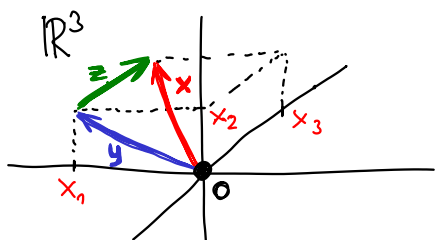
↑ neboli ortogonalita

Délka v  $\mathbb{R}^n$  (standardní norma):



$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

↑ Pythagorova věta



Obecně v  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\|x\| = \sqrt{\|y\|^2 + \|z\|^2} = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^2 + x_3^2}$$

↑ Pythagorova věta

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

↑ Důkaz indukcí podle  $n$ ,  
podobně jako při  
kroku  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Ortogonalita: Kdy jsou vektory  $x$  a  $y$  kolmé?

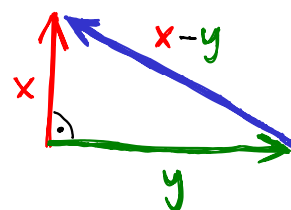
$x \perp y \Leftrightarrow$  platí Pythagorova věta v trojúhelníku:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$$

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2$$

$$0 = -2x_1y_1 - \dots - 2x_ny_n$$

neboli  $x \perp y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0$ .



8] Tento výraz se nazývá standardní skalární součin  $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ . Popisuje, jak moc vektory ukazují společným směrem:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \begin{cases} = 0 & \text{kolmost (žádný společný směr),} \\ > 0 & \text{ostrý úhel mezi } \mathbf{x} \text{ a } \mathbf{y}, \\ < 0 & \text{tupý úhel mezi } \mathbf{x} \text{ a } \mathbf{y}. \end{cases}$$

Platí, že  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ .

Nulový vektor je kolmý na cokoliv.

Lemma: Necht'  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_i \neq 0$  a  $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$  pro  $i \neq j$ .  
Potom jsou  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  lineárně nezávislé.

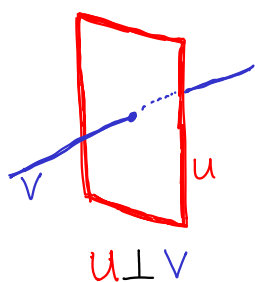
Důkaz: Necht'  $d_1 \mathbf{x}_1 + \dots + d_k \mathbf{x}_k = 0$ , vynásobme zleva  $\mathbf{x}_i^T$ .  
Z ortogonality je  $d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$ , tedy zbývá  $d_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i =$   
 $= d_i \|\mathbf{x}_i\|^2 = 0$ . Protože  $\mathbf{x}_i \neq 0$ , je  $\|\mathbf{x}_i\|^2 > 0$ , a tedy  $d_i = 0$ .

Protože  $i$  můžeme zvolit libovolně, je výše uvedená lineární kombinace  $d_1 \mathbf{x}_1 + \dots + d_k \mathbf{x}_k$  triviální.  $\square$

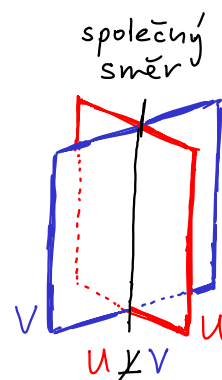
Definici ortogonality rozšíříme na podprostory:

$$U \perp V \iff \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

↑ stačí ověřit pro dvě báze



Auřak neplatí z běžného jazyka (dvě stěny místnosti jsou na sebe kolmé, ...).



Ortogonální doplněk:  $U^\perp = \{\mathbf{v} : \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\}$ .

Ortogonalní doplňky mají řadu vlastností:

9

- (i)  $U^\perp$  je vektorový podprostor.
- (ii)  $U \cap U^\perp = \{0\}$ ,  $\langle U, U^\perp \rangle = \mathbb{R}^n$ , tedy  
 $\dim U + \dim U^\perp = n$ .
- (iii)  $(U^\perp)^\perp = U$ .

Dokázat vlastnost (i) a první část (ii) je snadné.

Dokažme  $(U^\perp)^\perp \supseteq U$ : Každý vektor  $u \in U$  je kolmý na  $U^\perp$ , tedy podle definice patří do  $(U^\perp)^\perp$ .  $\square$

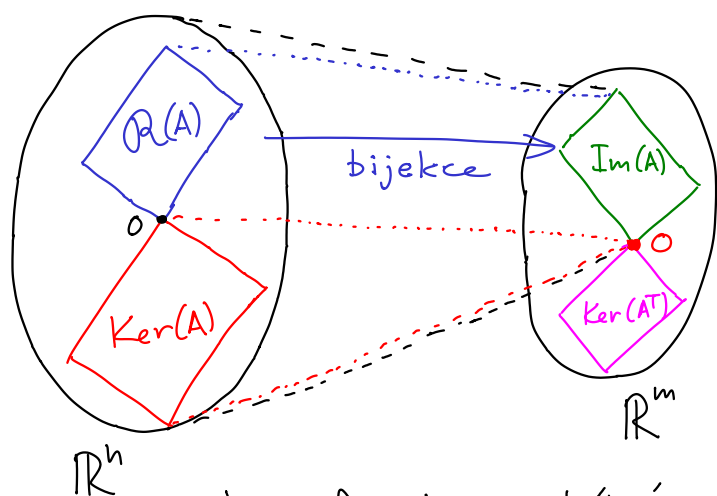
Zbytek zatím nedokážeme, potřebovali bychom vědět, že ortogonálních vektorů je hodně.

Konkrétně nás budou zajímat ortogonální báze:

Pro ně budeme chtít dokázat obdobu Steinitzovy věty, že jich je spousta.

Ukážeme, že libovolnou množinu ortogonálních vektorů lze doplnit na ortogonální bázi.

Fundamentální podprostory matice



- $R(A)$  ... řádkový podprostor,
- $Ker(A) = \{x : Ax = 0\}$   
... kernel,
- $Im(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$   
... obraz,
- $Ker(A^T)$  ... levý kernel.

Jsou fundamentální pro pochopení struktury lineárního zobrazení  $A: x \mapsto Ax$ .

10 V minulém semestru jsme dokázali, že  $\text{Ker}(A)$  a  $\mathcal{R}(A)$  jsou lineárně nezávislé. Navíc

$$\dim \text{Ker}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n,$$

podobně pro  $\text{Im}(A) = \mathcal{R}(A^T)$  a  $\text{Ker}(A^T)$ .

Platí však mnohem silnější vlastnost:

Věta:  $\text{Ker}(A) = \mathcal{R}(A)^\perp$ ,  $\text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^\perp$ .

Důkaz: Označme řádky  $A$  jako  $u_1^T, \dots, u_m^T$ .

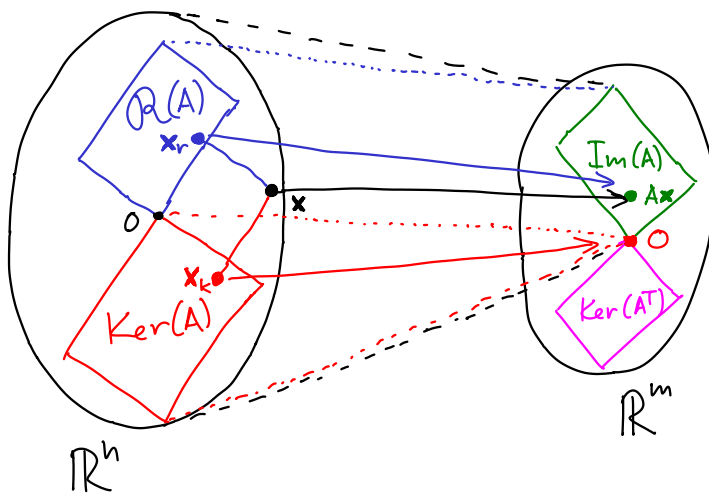
Nechť  $x \in \text{Ker}(A)$ . Podle definice platí  $Ax = 0$ , tedy

$$u_1^T x = 0, u_2^T x = 0, \dots, u_m^T x = 0.$$

Proto je libovolná lineární kombinace  $u \in \mathcal{R}(A)$  kolmá na  $x$ .

Naopak libovolné  $x \perp \mathcal{R}(A)$  patří do  $\text{Ker}(A)$ . Tedy

$\mathcal{R}(A) = \text{Ker}(A)^\perp$  a pro  $A^T$  získáme druhou rovnost.  $\square$



Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}^n$  lze uvést ortogonální projekce  $x_r \in \mathcal{R}(A)$ ,  $x_k \in \text{Ker}(A)$ ,  $x = x_r + x_k$ :

$$Ax_r = Ax, \quad Ax_k = 0.$$

Pokud by  $A|_{\mathcal{R}(A)}$  nebyla bijekce, potom:

$$\exists x, y \in \mathcal{R}(A), x \neq y: Ax = Ay \Rightarrow A(x-y) = 0.$$

Tedy  $x-y \in \mathcal{R}(A) \cap \text{Ker}(A)$ , což je spor.

Proto  $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \text{Im}(A)$ .

Abstraktní definice skalárního součinu a normy

Opět ilustrujme dva různé způsoby, jak lze definovat matematické objekty:

- konkrétní.... popíšeme konstrukcí, ← *typicky první*
- abstraktní.... popíšeme pouze vlastnostmi, které objekty musí splňovat.

Standardní skalární součin a norma z minulého cvičení jsou příklady prvního přístupu. Zkusíme z nich vybrat ty správné vlastnosti pro abstraktní definice.

Abstraktní definice: Skalární součin a norma jsou formy, přiřazují vektorům reálná čísla.

Norma  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ← *lineární forma*

- (i) Linearita:  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ .
- (ii) Trojúhelníková nerovnost:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .
- (iii) Nezápornost:  $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \geq 0$  a  $\|x\| > 0$  pro  $x \neq 0$ .

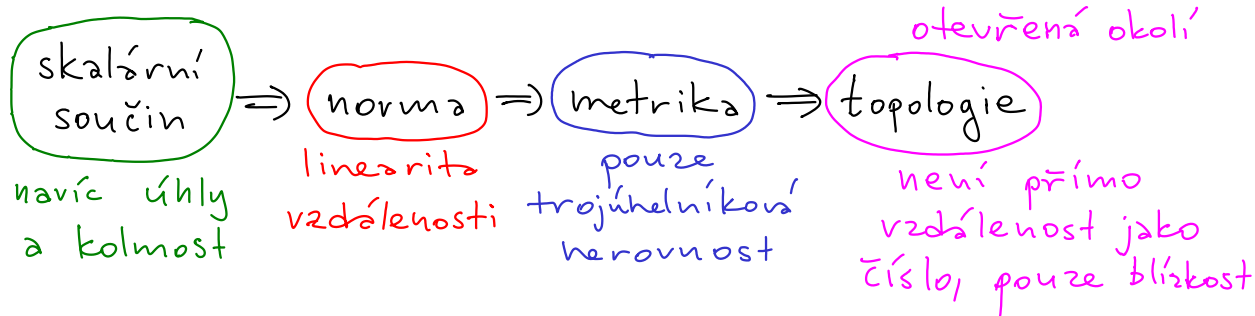
Skalární součin  $\langle \cdot | \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ← *bilineární forma*

- (i) Linearita:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \langle x+y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$ ,  
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \langle \alpha x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$ .
- (ii) Symetrie:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$ .
- (iii) Pozitivní definitnost:  $\langle x | x \rangle \geq 0$  a  $\langle x | x \rangle > 0$  pro  $x \neq 0$ .

Poznámka: V  $\mathbb{C}$  neplatí symetrie, ale  $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$ , ← *komplexní sdružení*  
jinak by neplatilo (iii).

12 Každý skalární součin indukuje normu:  $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$ .  
 Nejtěžší je ověřit vlastnost (ii), zatím vynecháme.  
 Naopak jsou normy, které neodpovídají součinu.

Geometričnost vektorových prostorů:



Charakterizujeme nestandardní skalární součiny:

Příklady nestandardního součinu:

1) Zvolme reálná čísla  $c_1, \dots, c_n > 0$ , potom je  $\langle x|y \rangle = \sum c_i x_i y_i$  skalární součin.

2) Jiný příklad v  $\mathbb{R}^2$ :

$$\langle x|y \rangle = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2,$$

vlastnost (iii) platí, neboť

$$\langle x|x \rangle = 2(2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2) = 2(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2) \geq 0.$$

Tyto skalární součiny jdou popsat maticemi jako

$$\langle x|y \rangle = x^T A y = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j \quad \text{pro vhodnou matici } A,$$

standardní skalární součin je pro  $A=I$ .

Příklad 1:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}.$$

Příklad 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dvě otázky:

① Pro které matice  $A$  je  $x^T A y$  skalární součin?

② Je každý skalární součin tohoto typu?



Zaměříme se nejprve na první otázku.

Výraz  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$  se obecně nazývá bilineární forma, neboť je to funkce  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a splňuje linearitu (i).

→ Pro symetrii (ii) musí být  $\mathbf{A}$  symetrická:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

→ Pro pozitivní definitnost (iii) musí být matice  $\mathbf{A}$  pozitivně definitní:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{pro } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Jak takové matice vypadají zatím řešit nebudeme, ukážeme si ekvivalentní definice na konci textu.

Pozorování: Kdykoliv je  $\mathbf{A}$  symetrická pozitivně definitní, je  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$  skalární součin.

Věta: Libovolný skalární součin  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  je roven  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$  pro nějakou symetrickou pozitivně definitní matici  $\mathbf{A}$ .

Důkaz: Pokud známe skalární součin vůči libovolné bázi, je z linearit jednoznačně určen.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Zvolme  $\mathbf{A}$  jako Gramovu matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n \rangle \end{pmatrix}$$

platí  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ .

① Symetrickost  $\mathbf{A}$  plyne z (ii).

② Pozitivní definitnost plyne z (iii).

□

14] Pro danou symetrickou pozitivně definitní matici  $A$  budeme značit skalární součin  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$  a příslušnou normu  $\|\mathbf{x}\|_A = \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}$ .

Jaký je geometrický význam těchto součinů/norem?

Věta: Matice  $A$  je symetrická pozitivně definitní, právě když existuje Choleského rozklad  $A = R^T R$ , kde  $R$  je regulární matice.

↖ důkaz ukážeme na konci textu

Proto  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{y} = (R\mathbf{x})^T (R\mathbf{y}) = \langle R\mathbf{x} | R\mathbf{y} \rangle$ .

Je to standardní skalární součin vůči jiné bázi, popsané maticí přechodu  $R$ . Podobně  $\|\mathbf{x}\|_A$ .

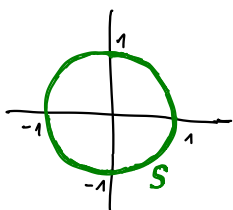
Charakterizace nestandardních norem:

Pokud na libovolné přímce zvolíme normu jednoho nenulového vektoru, je norma na přímce určena z linearitry (i). Stačí popsat jednotkovou sféru

$$S = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1 \}.$$

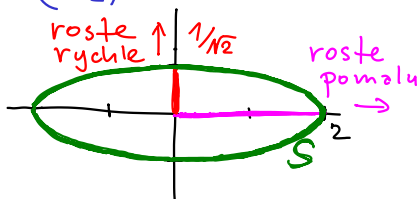
Ukažme příklady v  $\mathbb{R}^2$ :

standardní norma



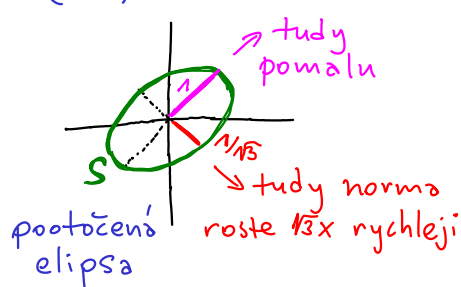
ve všech směrech stejná norma

$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 2 \end{pmatrix}$ -norma



elipsa s osami v kanonických vektorech

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ -norma



pootočená elipsa

Věta: Pro každou  $A$ -normu  $\|\cdot\|_A$  je jednotková sféra  $S$  elipsoid. ← Osy ve směru vlastních vektorů  $A$ , budeme probírat později.  
↖ zatím bez důkazu.

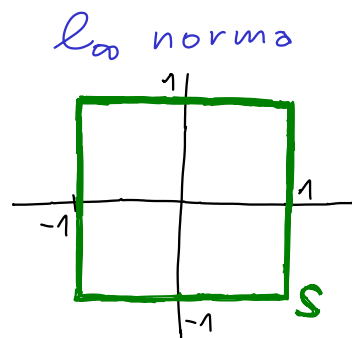
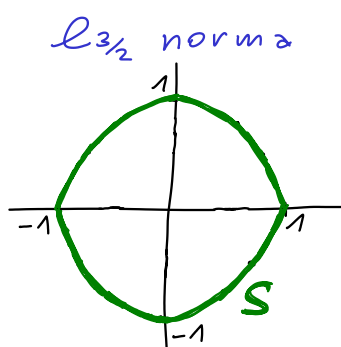
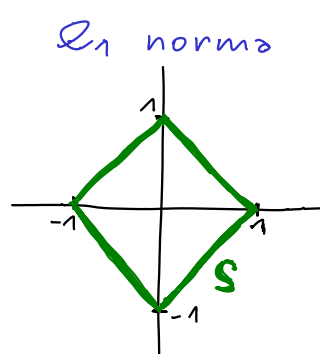
Existují ale i další normy, pro  $p \neq 2$  nedefinované 15  
skalárním součinem:

$l_p$  normy:  $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$ ,  $p \in [1; \infty]$ .

→  $l_2$  je standardní norma,

→  $l_1$  je manhattouška norma  $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ ,

→  $l_\infty$  je maximová norma  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ .



Obecně jednotková sféra může být ještě méně pravidelná. Necht'  $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ .

Lemma: Pro libovolnou normu platí:

(i)  $\mathbf{S}$  obsahuje přesně dva body na každé příince počátkem,

(ii)  $\mathbf{B}$  je symetrická podle počátku,

(iii)  $\mathbf{B}$  je konvexní.

Důkaz: (i) vyplývá z linearity a nezápornosti normy.

(ii) vyplývá z linearity pro  $\alpha = -1$ .

(iii) vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti,

čtenář si může rozmyslet. □

Pro libovolné dva vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}$  platí pro libovolnou konvexní kombinaci, že  $\|t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}\| \leq 1$ .

16 Platí však i obrácená charakterizace:

Věta: Necht'  $B$  je uzavřená omezená konvexní podmnožina  $\mathbb{R}^n$ , symetrická podle počátku.

Necht'  $S$  je hranice  $B$ , že  $0 \notin S$ .

Potom je zobrazení  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definované

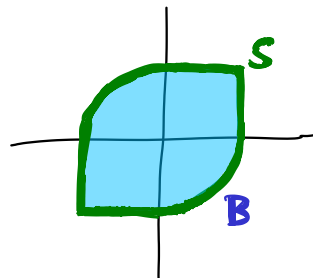
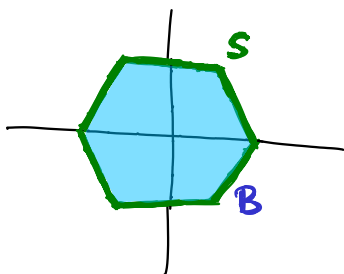
$$\|x\| = |\alpha|, \text{ kde } x = \alpha y \text{ a } y \in S,$$

norma v  $\mathbb{R}^n$ .

Důkaz: Jako cvičení, stačí ověřit vlastnosti

(i) až (iii). Nejobtížnější je trojúhelníková nerovnost.  $\square$

Příklady obecných norem:



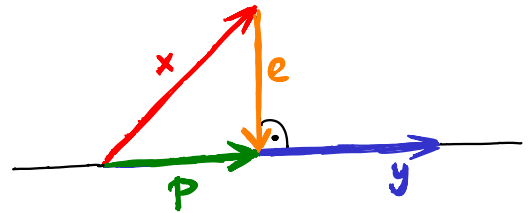
Ortogonalní projekce a Cauchy-Schwarzova nerovnost

V tomto cvičení objevíme geometrickou interpretaci pro skalární součin.

Ortogonalní projekce na přímku:

Mějme dva vektory  $x$  a  $y$ .

Chceme nalézt kolmou projekci  $p$  vektoru  $x$  na přímku  $\langle y \rangle$ .



Má platit  $p = c \cdot y$ . Chceme zvolit  $c$  tak, aby platilo

$c$  nějaká konstanta

$$e = p - x \perp y.$$

← dosadíme za  $p$ .

$$0 = \langle p - x | y \rangle = \langle c y - x | y \rangle = c \langle y | y \rangle - \langle x | y \rangle, \text{ neboli } c = \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle}.$$

$\leftarrow$  pouze normovací faktor

Věta: Kolmá projekce na přímku  $\langle y \rangle$  je lineární zobrazení

$$x \mapsto \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y.$$

□

Cauchy-Schwarzova nerovnost:

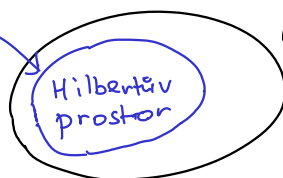
Pro libovolné dva vektory  $x$  a  $y$  platí  $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

Motivace třeba ve funkcionální analýze, ve vektorových prostorech nekonečné dimenze. Zde mohou mít funkce nekonečnou normu, proto se omezíme na

Hilbertovy podprostory pouze funkcí konečné normy.

Podle nerovnosti je i konečný skalární součin.

konečná norma a skalární součin



← prostor všech funkcí (spojitých, diferencovatelných, ...)

### 18. Důkaz nerovnosti:

Délka rozdílu projekce  $e$  je nezáporná, tedy i

$$\begin{aligned} 0 \leq \|e\|^2 &= \langle e | e \rangle = \langle p-x | p-x \rangle = \left\langle \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} y - x \mid \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} y - x \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} y \mid \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} y \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} y \mid x \right\rangle + \langle x | x \rangle = \\ &= \frac{\langle x|y \rangle^2}{\langle y|y \rangle} - 2 \frac{\langle x|y \rangle^2}{\langle y|y \rangle} + \langle x | x \rangle, \end{aligned}$$

*stáčí elementární úpravy* (dashed circle)  
*Symetrie linearita* (pink arrow)  
*opět linearita* (pink arrow)

neboli  $\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$ .  $\rightarrow$  Cauchy-Schwarzova nerovnost plyne odmocněním.  $\square$

Dokažme nyní, že skalární součin indukuje normu  $\sqrt{\langle x|x \rangle}$ , konkrétně že platí trojúhelníková nerovnost:

$$\begin{aligned} \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| \quad \downarrow \text{vše kladné, uvažme druhou mocninu} \\ \langle x+y | x+y \rangle &\leq \langle x|x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y|y \rangle \\ \langle x|x \rangle + 2\langle x|y \rangle + \langle y|y \rangle &\leq \langle x|x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y|y \rangle \\ \langle x|y \rangle &\leq \|x\|\|y\| \rightarrow \text{Cauchy-Schwarzova nerovnost} \end{aligned}$$

Tedy trojúhelníková nerovnost je ekvivalentní s Cauchy-Schwarzovou nerovností.

### Ortogonální projekce na obecný podprostor:

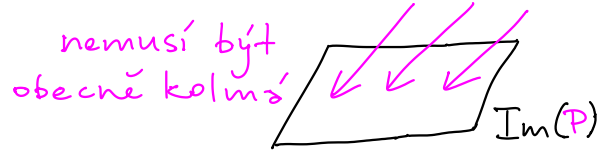
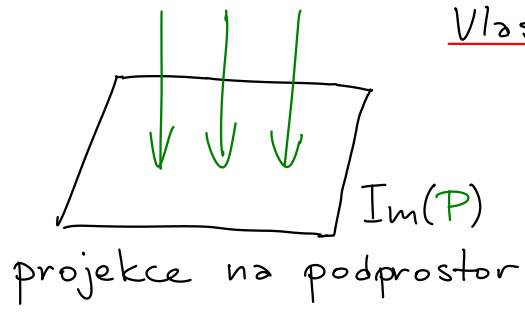
Popišme nejprve matici  $P$  kolmé projekce na přímku:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} y, \text{ ve standardním skalárním součinu:} \\ x &\mapsto \frac{x^T y}{y^T y} y = y \frac{y^T x}{y^T y}, \text{ neboli } P = \frac{y y^T}{y^T y}. \end{aligned}$$

*prohodíme pořadí členů* (pink arrow)

Odvodit přesný předpis pro obecný podprostor je složitější, zatím se spokojíme pouze s vlastnostmi  $P$ .

Vlastnosti, co musí P splňovat:



① Im(P) je fixován:

$\forall y \in \text{Im}(P): Py = y$ , tedy

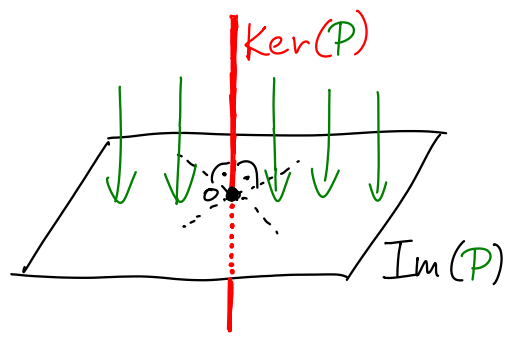
$\forall x \in \mathbb{R}^n: P(Px) = Px$ .

Protože to platí pro každý vektor  $x$ , je  $P^2 = P$ .

Věta: Matice  $P$  je projekce na podprostor Im(P), právě když  $P^2 = P$ . □

② Projekce je kolmá:  $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x - Px \perp \text{Im}(P)$ .

Speciálně  $\text{Ker}(P) \perp \text{Im}(P)$ , kvůli dimenzím je  $\text{Ker}(P) = \text{Im}(P)^\perp$ . Pro každou matici platí, že  $\text{Ker}(P) = \mathcal{R}(P)^\perp$ , tedy



$\text{Im}(P) = \mathcal{R}(P)$ .

Chceme dokázat, že  $P = P^T$ .

Definice transpozice přes duální zobrazení:

Platí, že pro dané lineární zobrazení  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  existuje právě jedno lineární zobrazení  $f^*: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , že platí:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \quad \underbrace{\langle f(x) | y \rangle}_{\mathbb{R}^m} = \underbrace{\langle x | f^*(y) \rangle}_{\mathbb{R}^n}$$

duální zobrazení

Dokažme alespoň, že v případě standardního skalárního součinu a maticové reprezentace  $A$ , kde  $f^*$  je reprezentováno  $A^T$ :

[20] Důkaz: Necht'  $A$  je matice, chceme zkonstruovat  $B$  tak, aby platilo  $\langle Ax | y \rangle = \langle x | By \rangle$ . Zjevně  $B=A^T$  toto splňuje. Dokažme, že žádná jiná matice to nesplňuje, stačí pro kanonickou bázi  $e_1, \dots, e_n$ :

$$a_{ji} = (Ae_i)_j = \sum_{k=1}^n (Ae_i)_k \cdot (e_j)_k = \sum_{k=1}^n (e_i)_k \cdot (Be_j)_k = b_{ij}.$$

nenulové  
pouze pro  $k=j$

Tedy  $B=A^T$ .

nenulové  
pouze pro  $k=i$

□

Vraťme se k ortogonální projekci  $\mathcal{P}$ . Dokažme, že  $\langle \mathcal{P}x | y \rangle = \langle x | \mathcal{P}y \rangle$ . Protože  $\text{Ker}(\mathcal{P}) = \text{Im}(\mathcal{P})^\perp$ , můžeme

vyjádřit:  $x = x_k + x_I$ , kde  $x_k, y_k \in \text{Ker}(\mathcal{P})$ ,  
 $y = y_k + y_I$ ,  $x_I, y_I \in \text{Im}(\mathcal{P})$ .

Protože  $\mathcal{P}x = x_I$  a  $\mathcal{P}y = y_I$ , dostáváme:

$$\langle \mathcal{P}x | y \rangle = \langle x_I | y_k + y_I \rangle = \langle x_I | y_k \rangle + \langle x_I | y_I \rangle = \underbrace{0}_{=0 \text{ z ortogonality}} + \langle x_I | y_I \rangle = \langle x_I | y_I \rangle.$$

$$\langle x | \mathcal{P}y \rangle = \langle x_k + x_I | y_I \rangle = \langle x_k | y_I \rangle + \langle x_I | y_I \rangle = \langle x_I | y_I \rangle.$$

Tedy  $\mathcal{P}^T = \mathcal{P}$ . Naopak z této vlastnosti vyplývá, že  $\text{Ker}(\mathcal{P}) = \text{Im}(\mathcal{P})^\perp$ , tedy projekce je ortogonální.

Věta: Projekce  $\mathcal{P}$  je ortogonální, právě když  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T$ .

Brzo ukážeme, že když sloupce  $A$  tvoří bázi  $\text{Im}(\mathcal{P})$ , potom  $\mathcal{P} = A(A^T A)^{-1} A^T$ , speciální případ je

$$\mathcal{P} = \frac{\begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{matrix} \text{---}}{\begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{matrix} \text{---}} \leftarrow AA^T$$

projekce na přímku  $(A^T A)^{-1}$

Jiný způsob:

$\mathcal{P}$  zobrazuje  $x$  na nejbližší bod  $\text{Im}(\mathcal{P})$ . Lze využít analýzu a derivace. Zkuste pro projekci na přímku.



## Ortogonalní báze a Gram-Schmidtova ortogonalizace

Připomeňme, že nenulové ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé, tedy pojem ortogonální báze má smysl:  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0} : \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j \quad \forall i \neq j$ .

Chceme dokázat, že jich je hodně a mají bohatou strukturu:

Věta: Libovolnou množinu nenulových ortogonálních vektorů lze rozšířit na ortogonální bázi.

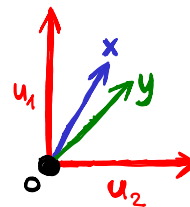
Motivace: Proč jsou ortogonální báze důležité?

→ Ortogonální vektory ukazují maximálním možným odlišným směrem.

① Výhodné numerické vlastnosti



versus



Souřadnice  $x$  a  $y$  vůči  $u_1, u_2$  jsou velice odlišné, špatné pro zaokrouhlování.

Změna v souřadnicích je úměrná  $\|x-y\|$ .

Krylovův podprostor  $\mathcal{K}_n(A, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \dots, A^{n-1}\mathbf{v} \rangle$  obsahuje hodně informací o matici, lze využít například k řešení  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Problém je, že úhly mezi vektory jsou hodně malé, což při zaokrouhlování vede ke kumulaci chyb a ztrátě informace.

Řešení: konstrukce ortogonální báze  $\mathcal{K}_n(A, \mathbf{v})$ .  
(tzv. Arnoldiho algoritmus)

22 (2) Snadný výpočet souřadnic pomocí ortogonálních projekcí, zatímco pro obecné báze je to řešení soustavy  $A\alpha = x$ .

Lemma: Pro ortogonální bázi  $v_1, \dots, v_n$  je  $x = \sum \alpha_i v_i$ ,  
kde  $\alpha_i = \frac{\langle x | v_i \rangle}{\langle v_i | v_i \rangle}$ . ← kolmá projekce na jednotlivé přímky

Důkaz:  $\langle x | v_i \rangle = \langle \sum \alpha_j v_j | v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i | v_i \rangle$ . ↖ ortogonalita báze □

Mnohem snazší než pro obecné báze.

Základní myšlenka Fourierovy řady:

Hladké funkce  $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tvoří vektorový prostor se standardním skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx. \quad \leftarrow \int \text{je jako } \sum; \text{ rozmyslete si, že splňuje vlastnosti (i) až (iii).}$$

Množina funkcí  $B = \{ \cos(nx), \sin(nx), 1 : n \in \mathbb{N} \}$  je ortogonální, což lze ověřit výpočtem integrálů.

Fourierova řada  $f(x) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_1^{\infty} b_n \sin(nx)$ ,

kde

$$a_n = \frac{\langle f(x) | \cos(nx) \rangle}{\langle \cos(nx) | \cos(nx) \rangle}, \quad b_n = \frac{\langle f(x) | \sin(nx) \rangle}{\langle \sin(nx) | \sin(nx) \rangle}.$$

Za určitých podmínek konverguje k  $f(x)$ , pokud  $f(x) \in \langle B \rangle$ . Je to aplikace lemmatu, souřadnice jsou ortogonální projekce na přímky vektorů  $B$ .

V analýze se řeší, které funkce leží v  $\langle B \rangle$  a které vlastnosti jsou zachovány řadami funkcí.  
Lze uvažovat i na obecnějších prostorech.

První důkaz věty - fundamentální podprostory  
 Necht'  $v_1, \dots, v_k$  je ortogonální množina, dejme  
 je do řádků matice  $A$ . Tedy

$$\mathcal{R}(A) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle, \quad \dim \text{Ker}(A) = n - k.$$

Protože  $\text{Ker}(A) = \mathcal{R}(A)^\perp$ , můžeme zvolit libovolný  
vektor  $0 \neq v_{k+1} \in \text{Ker}(A)$ , čímž zvětšíme ortogonální  
 množinu o jedna. Opakováním vytvoříme bázi.  $\square$

Gram-Schmidtova ortogonalizace:

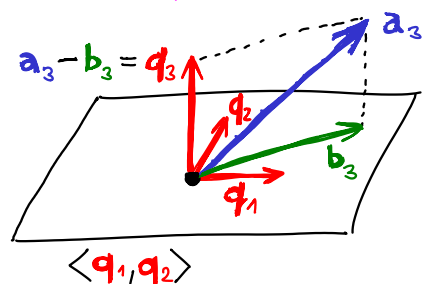
Z lineárně nezávislé množiny vektorů  $a_1, \dots, a_k$   
 vyrobí ortogonální množinu  $q_1, \dots, q_k$  stejného obalu.

Vektory ortogonalizujeme krok za krokem:

$$q_1 = a_1$$

$$q_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i | q_j \rangle}{\langle q_j | q_j \rangle} q_j = b_i$$

odečítáme kolmé projekce na  $q_1, \dots, q_{i-1}$



Důkaz správnosti:

Je zřejmé, že  $\langle q_1, \dots, q_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ . Nevíme však, že  
 $q_1, \dots, q_k$  jsou ortogonální, budeme dokazovat indukcí:

$$\langle q_i | q_t \rangle = \left\langle a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i | q_j \rangle}{\langle q_j | q_j \rangle} q_j \mid q_t \right\rangle \stackrel{\text{linearity}}{=} \langle a_i | q_t \rangle -$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i | q_j \rangle}{\langle q_j | q_j \rangle} \langle q_j | q_t \rangle = \langle a_i | q_t \rangle - \langle a_i | q_t \rangle = 0.$$

$\square$

Vlastně platí, že  $b_i$  je kolmá projekce  $a_i$  na  
podprostor  $\langle q_1, \dots, q_{i-1} \rangle$ .

24 Je možné vektory  $q_1, \dots, q_k$  průběžně normovat a vyhnout se dělení:  $q_i := \frac{q_i}{\|q_i\|}$ , potom  $\langle q_j | q_j \rangle = 1$ .

Druhý důkaz věty - přes Gram-Schmidtovu ortogonalizaci  
 Množinu  $v_1, \dots, v_k$  libovolně doplníme na bázi a aplikujeme ortogonalizaci.  $\square$

Ortogonální matice: Matice  $Q$  je ortogonální, pokud má ortonormální sloupce.

↖ ortogonalita + norma rovna jedné

Platí, že  $Q^T Q = I_n$ , tedy  $Q^T$  je levá inverze  $Q^{-1}$ .  
 Pro čtvercové matice  $Q$  je  $Q^T$  jejich inverze.

↪ sloupce jsou ortogonální báze

K 2. motivaci: Vyjádření souřadnic vůči obecné bázi vede na  $Ax = x$ , pro ortogonální bázi na  $Qx = x$ , kde

$x = Q^T Qx = Q^T x$ , což odpovídá skalárním součinnům u kolmých projekcí.

$$\begin{bmatrix} -q_1 - \\ -q_2 - \\ \vdots \\ -q_n - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \langle x | q_1 \rangle \\ \langle x | q_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | q_n \rangle \end{bmatrix}$$

↖ alternativně  $x = A^{-1}x = Q^T x$ , řešení inverzní matice

Vlastnosti ortogonálních matic

→ Součin dvou ortogonálních matic  $Q_1 Q_2$  je ortogonální.

Ortogonální matice tvoří grupu  $O_n$ , geometricky jsou to rotace a zrcadlení. Podgrupa poloviční velikosti  $SO_n$  je tvořena jen rotacemi.

↖ speciální ortogonální grupa

→ zachovávají standardní skalární součin:

$$\langle Qx | Qy \rangle = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Qy = x^T y = \langle x | y \rangle.$$

zachovávají úhly, délky:  $\|Qx\| = \|x\|$ . ↖ výhodné numericky, neamplifikují chyby

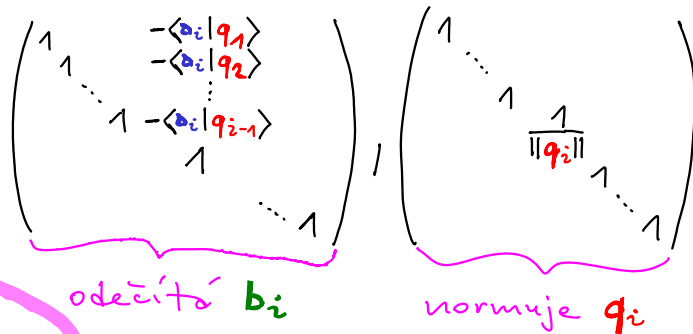
# Maticový zápis Gram-Schmidtovy ortogonalizace:

25

Matici  $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_k \\ | & & | \end{bmatrix}$  transformujeme na  $Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_k \\ | & & | \end{bmatrix}$ ,

která je ortogonální:  $AR_1R_2 \dots R_\ell = Q$ .

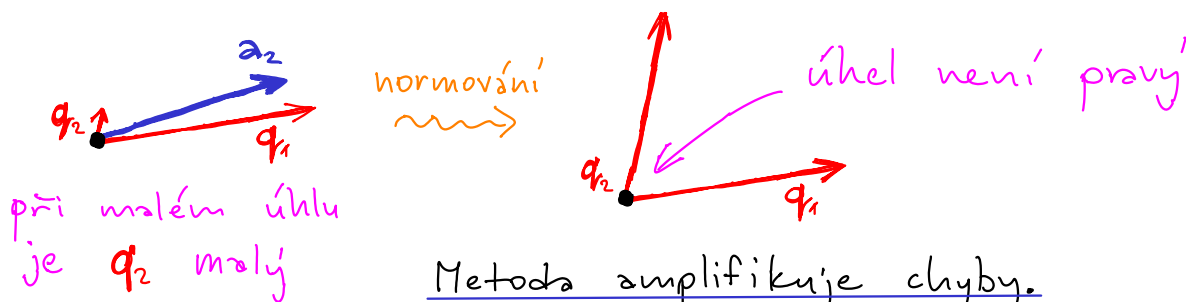
$R_\ell$  jsou dvou typů:



## Slavný QR rozklad:

$A = QR$  ←  $\blacksquare$  horní  
↑ ortogonální      trojúhelníková

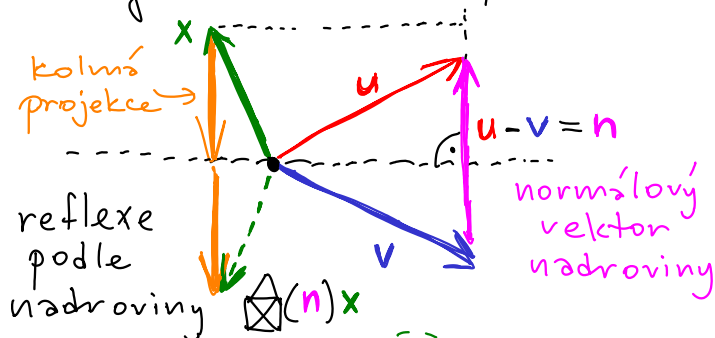
Má špatné numerické vlastnosti:



Řešení: ortogonální úpravy  $Q_\ell \dots Q_1 A = R$ , potom  $R$  má stejné numerické vlastnosti jako  $A$ .

## ① Householderovy reflexe $\hat{\Delta}(n)$

Ortogonální matice, co zobrazuje  $u \mapsto \|u\|e_1 = v$ .



$\hat{\Delta}(n)x$  získáme odečtením dvojnásobku kolmé projekce  $x$  na  $n$ .

Tedy  $\hat{\Delta}(n) = I - 2 \frac{nn^T}{n^T n}$  ← matice kolmé projekce na přímku

26

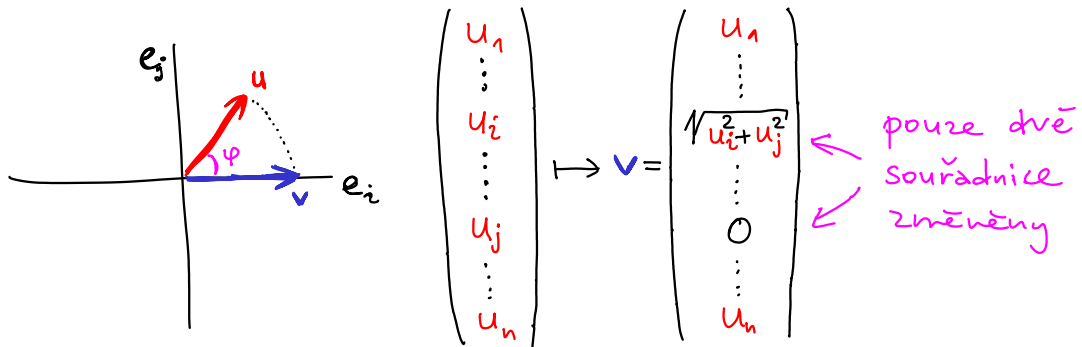
$$\left( a_1 - \|a_1\| e_1 \right) \cdot A = \begin{bmatrix} \|a_1\| & \text{///} \\ 0 & ? \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \text{///} \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \cdot A = \begin{bmatrix} * & * & \text{///} \\ * & * & ? \\ 0 & & \text{///} \end{bmatrix}$$

a tak dál. Získáme  $A=QR$  po  $n-1$  krocích.

2. Givensovy rotace:

Vytvoří pouze jednu 0, musíme násobit  $O(n^2)$ -krát, vhodné pro matice s hodně nulami.

Uvažme rovinu určenou  $e_i$  a  $e_j$ , v ní rotujeme:

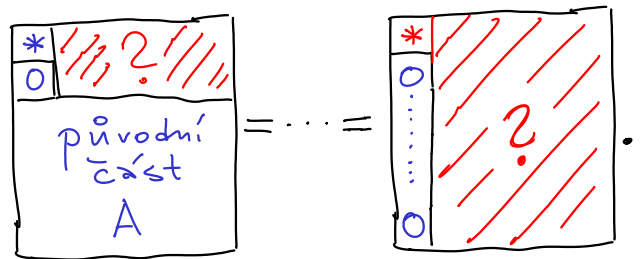


$$R_{ij}^\varphi = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cos \varphi & & -\sin \varphi & \\ & & \sin \varphi & & \cos \varphi & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + u_j^2}} \right)$$

vhodné úhly

$$R_{1,n}^\varphi \dots R_{1,3}^\varphi R_{1,2}^\varphi A = R_{1,n}^\varphi \dots R_{1,3}^\varphi$$

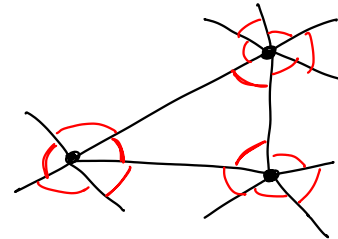


a doděláme zbytek podobně jako v 1.

Metoda nejmenších čtverců a determinanty

Mějme soustavu  $Ax=b$ , řešení existuje  $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$ .  
 Když řešení existuje, umíme ho najít. Co když není?  
 V řadě aplikací nějaké řešení chceme najít.

Problémem se zabýval Gauss v zeměměřičství. Představme si, že chceme určit polohy bodů ze znalosti vzdáleností a úhlů.



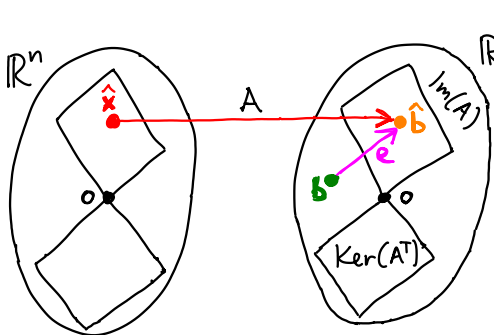
více rovnic než neznámých, typicky neexistuje řešení

Příklad: Řešení existuje pouze tehdy, když jsou prave strany v poměru 2:3:4.

$2x = b_1$   
 $3x = b_2$   
 $4x = b_3$

← Pokud pravá strana pochází z měření, typicky nebude platit kvůli chybám.

Mohli bychom část rovnic vynechat, ale to bychom museli předpokládat, že chyba je jen v některých, což není typické. Chceme co nejméně změnit pravou stranu, aby řešení existovalo.



Metoda nejmenších čtverců:

$Ax=b$  ... nemá řešení  
 $A\hat{x}=\hat{b}$  ... chceme vyřešit, min. součtu čtverců rozdílů

kde  $\hat{b} \in \text{Im}(A)$  je nejbližší vektor k  $b$ , tedy kolmá projekce na  $\text{Im}(A)$ .

Ve statistice se toto nazývá lineární regrese.

$Ax=b$   
 ↑ určeno modelem  
 ↑ data

Například data jsou dvojice  $(x_i, y_i)$ , model je, že leží na parabole.

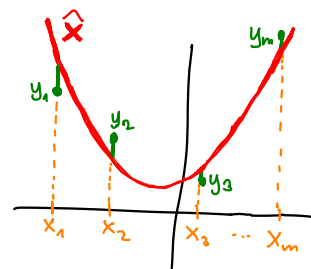
Hledáme neznamé  $a, b, \gamma$ , aby platilo

$$ax_i^2 + bx_i + \gamma = y_i.$$

28 Dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & | & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & | & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ x_m^2 & x_m & 1 & | & y_m \end{pmatrix}$$

Typicky nebude existovat přesné řešení.



Existuje i totální metoda nejmenších čtverců:

Chceme upravit  $Ax=b$  na  $\hat{A}\hat{x}=\hat{b}$ , aby se minimalizovaly rozdíly  $A-\hat{A}$ ,  $b-\hat{b}$ . Situace, kdy nedůvěřujeme modelu. ← Matematicky složité, nebudeme řešit.

Jak vyřešit nejmenší čtverce?

$e = \hat{b} - b$ , platí, že  $e \perp \text{Im}(A)$ , neboli  $e \in \text{Ker}(A^T)$ .

$$0 = A^T e = A^T(\hat{b} - b) = A^T(A\hat{x} - b),$$

$$\hat{A}^T \hat{x} = A^T b. \quad \leftarrow \text{normální rovnice}$$

Předpokládejme, že  $A^T A$  je regulární, potom

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad \text{a} \quad \hat{b} = A(A^T A)^{-1} A^T b.$$

Lze snadno ověřit, že ← Matice  $P$  kolné projekce na podprostor  $\text{Im}(A)$ .  
splňuje  $P^2 = P$  a  $P^T = P$ .

Matice  $A^T A$  má řadu zajímavých vlastností, například je symetrická pozitivně semidefinitní.

Lemma:  $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ .

Důkaz:  $\text{Ker}(A^T A) \supseteq \text{Ker}(A)$ :  $Ax=0 \Rightarrow A^T Ax=0$ .

$\text{Ker}(A^T A) \subseteq \text{Ker}(A)$ :  $A^T Ax=0$ , vynásobme zleva  $x^T$ ,

$$0 = x^T A^T A x = (Ax)^T Ax = \|Ax\|^2.$$

← Vektor má nulovou normu, právě když je nulový. □



Proto  $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$ , tedy pokud má A lineárně nezávislé sloupce, je  $A^T A$  regulární a existuje  $(A^T A)^{-1}$ . 29

Lze i přes QR rozklad:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Typicky není  $Q^T Q R \hat{\mathbf{x}} = Q^T \mathbf{b}$   
čtvercová, proto  
neekvivalentní úprava:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, Q \in \mathbb{R}^{m \times m}, Q^T Q = I_n$

$$\hat{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$$

Numericky přesnější,  
protože  $A^T A$  má  
druhou mocninu  
čísla podmíněnosti A.

### Determinanty

$\det(A): \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , multilineární alternující forma  
(vůči sloupcům matice A).

Kolem roku 1900 klíčový pojem lineární algebry, dnes  
jsou v popředí jiné pojmy, třeba vlastní čísla.

Co může říct jedno číslo o matice? Ne tolik, ale  
překvapivě hodně!

Jak definovat determinant?

- ① Vlastnostmi. ← jako úkol
- ② Geometricky. ← přístě
- ③ Formulí v koeficientech:

← překvapivě těžké  
zvolit správný přístup

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

$\epsilon^{\pm 1}$

není jasné, proč zrovna tato  
definice je zajímavá

Příklad 3x3:

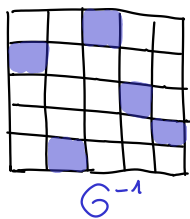
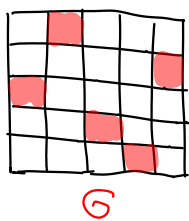
$$\det \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \color{green}{\square} & \square & \square \\ \square & \color{green}{\square} & \square \\ \square & \square & \color{green}{\square} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square & \color{green}{\square} & \square \\ \color{green}{\square} & \square & \square \\ \square & \square & \color{green}{\square} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square & \square & \color{green}{\square} \\ \square & \color{green}{\square} & \square \\ \color{green}{\square} & \square & \square \end{pmatrix}}_{\text{znaménko } +1} - \underbrace{\begin{pmatrix} \square & \color{red}{\square} & \square \\ \square & \square & \color{red}{\square} \\ \color{red}{\square} & \square & \square \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \color{red}{\square} & \square & \square \\ \square & \color{red}{\square} & \square \\ \square & \square & \color{red}{\square} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \square & \square & \color{red}{\square} \\ \color{red}{\square} & \square & \square \\ \square & \color{red}{\square} & \square \end{pmatrix}}_{\text{znaménko } -1}$$

Chceme odvodit zajímavé vlastnosti  $\det(A)$ :

- 1)  $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$ . ← každý člen  $\prod$  je vynásoben c
- 2) Vynásobení libovolného řádku c vynásobí c i det.  
← právě jeden člen  $\prod$  je vynásoben c

30) 3)  $\det(A^T) = \det(A)$ .  $\leftarrow$  Vlastnosti řádků platí i pro sloupce.

Důkaz: Inverzní permutace násobí přes indexy zrcadlově podle diagonály a má stejné znaménko.



Proto člen sumy  $\det(A)$  pro  $G$  je raven členu  $\det(A^T)$  pro  $G^{-1}$ , tedy  $\det(A) = \det(A^T)$ .  $\square$

4) Nulový řádek implikuje nulový determinant.

5) Determinant je alternující:

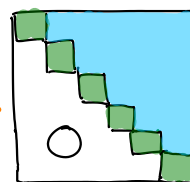
Prohození dvou řádků  $i$  a  $j$  mění znaménko.

Důkaz: Pro každou permutaci  $G$  dostaneme stejně členy  $\Pi$  po prohození řádků při složení  $G$  s transpozicí  $(i,j)$ . Protože složení mění znaménka, má determinant má opačné znaménko.  $\square$

6) Dva stejné řádky  $\Rightarrow$  nulový determinant.  $\leftarrow$  stačí prohodit

7) Trojúhelníková matice  $T$  má  $\det(T) = \prod t_{i,i}$ .

Každá jiná permutace násobí přes prvek pod diagonálou, což je nula.



8) Determinant je lineární v každém řádku.

$$\det \begin{pmatrix} \text{---} a_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} a_i + b_i \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} a_n \text{---} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \text{---} a_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} a_i \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} a_n \text{---} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \text{---} a_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} b_i \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} a_n \text{---} \end{pmatrix}.$$

Důkaz: Každý součin obsahuje jeden člen  $a_i + b_i$ , lze rozdělit na dva determinanty.  $\square$

9)  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  je regulární.  $\leftarrow$  nemění nenulovost

Důkaz: Převod do odstupňovaného tvaru a 7).  $\square$

## Rozvoj, Cramerovo pravidlo, geometrická definice determinantu

Nejprve dokažme, že determinant je multiplikativní:

Věta:  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

Důkaz: Pokud je A singulární, je i AB singulární, proto jsou obě strany nulové.

Pokud je A regulární, nechť  $A = E_k \cdots E_1$  je poslopnost matic elementárních úprav, o nich už víme:

$$\det(E_i) = \begin{cases} +1 & \dots \text{přičtení jednoho řádku k druhému} \\ c & \dots \text{vynásobení řádku } c \\ -1 & \dots \text{prohození dvou řádků} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \det(E_i X) &= \det(E_i) \det(X). \text{ Proto } \det(AB) = \det(E_k \cdots E_1 B) = \\ &= \det(E_k) \cdots \det(E_1) \det(B) = \det(A) \cdot \det(B). \end{aligned} \quad \square$$

Druhý důkaz: Když A je regulární, uvážíme zobrazení

$$d(B) = \frac{\det(AB)}{\det(B)} \text{ a dokážeme, } \leftarrow \text{jako úkol} \text{ že je to determinant.} \quad \square$$

Připomeňme si hledání polynomu  $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$  procházejícího body  $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ : prostor  $\mathbb{P}^n$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 & y_{n+1} \end{array} \right)$$

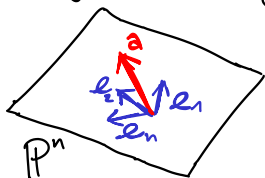
$V_{n+1}$   
Vendermondova matice

$$V_{n+1} \mathbf{a} = \mathbf{y}, \text{ neboli } \mathbf{a} = V_{n+1}^{-1} \mathbf{y}.$$

Zobrazení  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$   
vyhodnocuje polynomy  
 $\forall x_1, \dots, x_{n+1}$ .

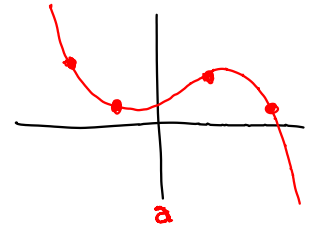
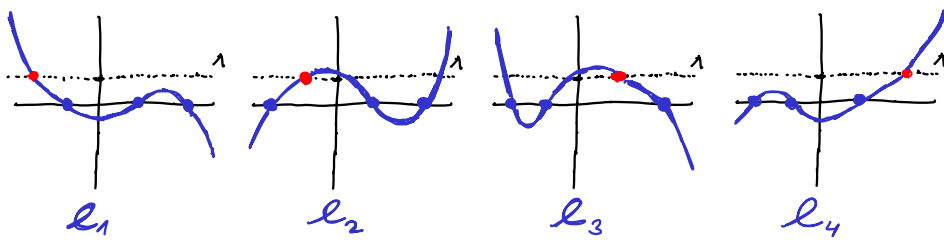
Inverze prokládá  
polynom body  
 $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ .

Ukázali jsme Lagrangeovu interpolaci



Hledáme neznámý polynom s koeficienty  $\mathbf{a}$ , vůči vhodné bázi  $e_1, \dots, e_{n+1}$ . To je mnohem snažší než vůči kanonické bázi.

32 Jak tato báze vypadá?



$$l_i(x) = \frac{(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_{n+1})}{(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_{n+1})} = \frac{\prod_{j \neq i} (x-x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i-x_j)}$$

↑ kořeny má v  $x_j, j \neq i$  a  $l_i(x_i) = 1$ .

konstanta

$$a = y_1 l_1 + \cdots + y_{n+1} l_{n+1}$$

Podobné koeficienty se nachází v inverzi  $V_{n+1}^{-1}$ .

Spočítejme nyní  $\det(V_{n+1})$ :

První řešení: převod do odstupňovaného tvaru.

trochu technické

$$\text{Využijeme } A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)(A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n).$$

na řádcích 1, ..., n-1

$$\begin{vmatrix} X_1^n & X_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ X_2^n & X_2^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n+1}^n & X_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \begin{vmatrix} X_1^{n-1} + X_1^{n-2} X_{n+1} + \cdots + X_{n+1}^{n-1} & \cdots & X_1 + X_{n+1} & 1 & 0 \\ X_2^{n-1} + X_2^{n-2} X_{n+1} + \cdots + X_{n+1}^{n-1} & \cdots & X_2 + X_{n+1} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{n-1} + X_n^{n-2} X_{n+1} + \cdots + X_{n+1}^{n-1} & \cdots & X_n + X_{n+1} & 1 & 0 \\ X_{n+1}^n & \cdots & X_{n+1}^2 & X_{n+1} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \begin{vmatrix} X_1^{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ X_2^{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ \text{něco} & \cdots & & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

aplikujeme stejný postup na  $V_n$

postupně eliminujeme  $(-x_{n+1})$ .

sloupce zprava, zbyvší řádky pouze nejvyšší mocnina  $\begin{bmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$

Druhé řešení: determinant je polynom.

$\det(A)$  je polynom v koeficientech matice  $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ .

$\det(V_{n+1})$  je polynom  $P(x_1, \dots, x_{n+1})$  stupně  $n+n-1+\dots+0 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$ .

Odečtením  $j$ -tého řádku od  $i$ -tého víme, že  $P(x_1, \dots, x_{n+1})$  je dělitelný  $(x_i - x_j)$ .

$$P(x_1, \dots, x_{n+1}) = C \cdot \prod_{i < j} (x_i - x_j) \text{ a určíme } C = 1. \quad \square$$

už máme správný stupeň

## Laplaceův rozvoj determinantu

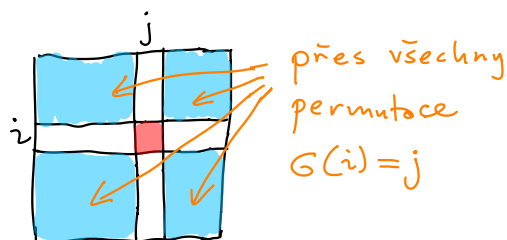
33

chtěli bychom určit  $\det(A)$  jako lineární kombinaci  $i$ -tého řádku:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

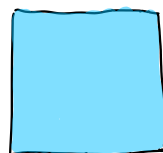
Chceme určit čísla  $C_{ij}$ .

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i, \sigma(i)}. \leftarrow \text{Každý člen sumy obsahuje právě jeden z koeficientů } a_{i1}, \dots, a_{in}.$$



$$C_{ij} = \pm \det$$

músíme určit znaménko



Můžeme přesunout  $a_{ij}$  na pozici  $(1,1)$ , to mění znaménko  $(i+j-2)$ -krát.

$$C_{ij} = \frac{(-1)^{i+j-2}}{a_{ij}} \cdot \det \left( \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right) = (-1)^{i+j} \cdot \det \left( \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right).$$

Věta: Pro  $i$ -tý řádek libovolné matice  $A$  platí:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \dots + a_{in}C_{in},$$

$$\text{kde } C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}). \leftarrow \text{Vznikne z } A \text{ vyškrtnutím } i\text{-tého řádku a } j\text{-tého sloupce.}$$

Výhodné, když  $i$ -tý řádek obsahuje hodně nul.

Adjungovaná matice a Cramerovo pravidlo

značí se  $\text{Adj}(A)$ , platí  $(\text{Adj}(A))_{ij} = C_{ji}$ .

$$\text{Věta: } A \cdot \text{Adj}(A) = \det(A) \cdot I_n, \text{ neboli } A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}.$$

Důkaz: Nejprve se zaměříme na diagonálu:

$$(A \cdot \text{Adj}(A))_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{ik} = \det(A) \text{ podle rozvoje.}$$

Mimo diagonálu:

$$(A \cdot \text{Adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{jk} = \det(B) \text{ podle rozvoje,}$$

$i \neq j$

kde  $B$  vznikne z  $A$  nahrazením  $i$ -tého řádku  $j$ -tým, tedy  $\det(B) = 0$ .  $\square$

34 Determinanty jsou historicky starší než matice, snaha o nalezení formulí pro řešení soustav lineárních rovnic,

$$\left( \begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} ca & cb & ce \\ ac & ad & af \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} ca & cb & ce \\ 0 & ad-cb & af-ce \end{array} \right).$$

✓ předpokládáme regularitu

$$y = \frac{af-ce}{ad-cb} \quad cax = ce - \frac{af-ce}{ad-cb} \cdot cb = \frac{ce(ad-cb) - cb(af-ce)}{ad-cb}.$$

$$x = \frac{acde - bc^2e - acbf + bc^2e}{a^2cd - abc^2} = \frac{ac(de-bf)}{ac(ad-cb)} = \frac{de-bf}{ad-cb}.$$

Tedy řešení jsou podíly dvou determinantů:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} eb & fd \\ ab & cd \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} ae & cf \\ ab & cd \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

To platí obecně a nazývá se to Cramerovo pravidlo.

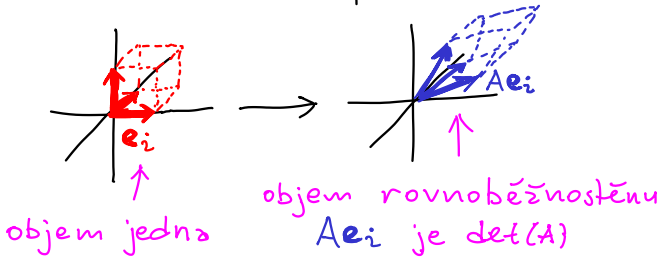
$$Ax = b \Rightarrow x = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} b, \quad \text{tedy } x_i = \frac{\sum_{k=1}^n b_k C_{kii}}{\det(A)} = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \leftarrow \text{Matice } B_i \text{ vznikne z } A \text{ nahrazením } i\text{-tého sloupce pravou stranou } b.$$

Tato formule vedla ke zkoumání pojmu determinant.

z A nahrazením i-tého sloupce pravou stranou b.

### Geometrická definice determinantu

Změna objemu při lineární transformaci.

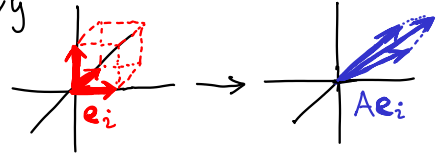


Abychom mohli dokázat ekvivalenci s definicí, museli bychom definovat objem a dokázat vlastnosti, což nebudeme dělat.

Proč to dává smysl?

- 1)  $\det(I_n) = 1$ , identita nemění objem.
- 2) Vynásobení řádku konstantou  $c$  natáhne rovnoběžnostěn v jedné dimenzi, proto mění objem  $c$ -krát. Vynásobení sloupce natáhne jeden vektor  $Ae_i$ , tedy zase mění  $c$ -krát.

3)  $\det(A)$  je nenulový, právě když je  $A$  regulární. Singulární 35  
matice splácnou krychli, takže má nulový  
objem. Obraz  $Ae_i$  regulární matice  
má nenulový objem.



4) Přičtení jednoho sloupce k druhému kosí jeden vektor  
 $Ae_i$  ve směru jiného vektoru  $Ae_j$ , což nemění objem.  
Přičtení jednoho řádku k druhému zase kosí jednu  
dimenzi do druhé, opět nemění objem.

5)  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  znamená, že při složení se  
změna objemu násobí.

6)  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ , neboť inverze ruší změnu objemu A.

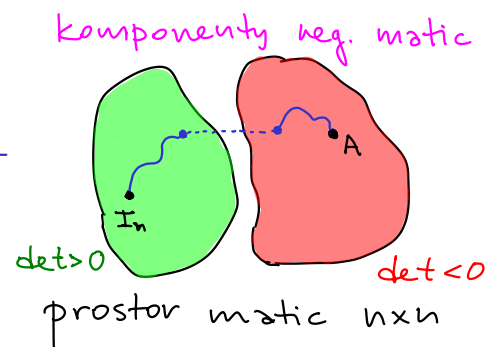
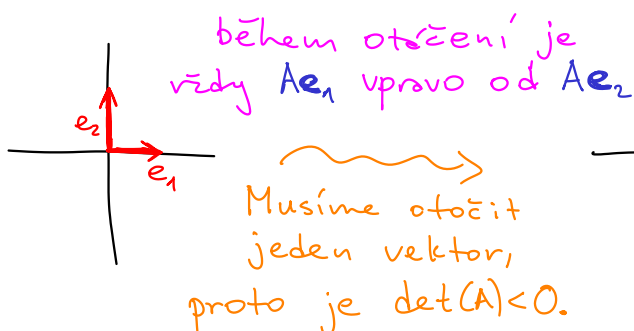
7)  $\det(Q) = \pm 1$  pro ortogonální matici, neboť rotace a reflexe  
nemění objem.

Co ale znamená znaménko pro objem?

Popisuje změnu orientace OS, ve 3D levotočivé versus  
pravotočivé. Formálně lze definovat následovně:

Chceme spojitě transformovat  $e_1, \dots, e_n$  na  $Ae_1, \dots, Ae_n$ ,  
aby se zachovala regularita v libovolný moment.

To ne vždycky jde, proto je dodatečná operace  
 vynásobení vektoru (-1), které ale mění znaménko det.

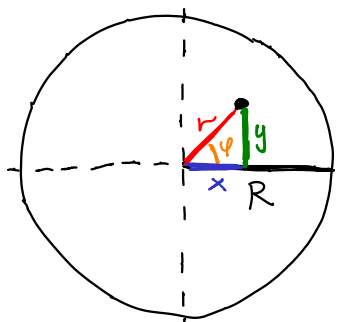


Aby to byla korektní definice, musíme dokázat, že na  
libovolné cestě z  $I_n$  do  $A$  je stejná parita počtu  
otočení vektorů. Speciálně prohození dvou řádků  
lze vstít jedním otočením, tedy mění znaménko.

### 36 Aplikace determinantu v analýze

Věta o substituci jednorozměrného integrálu obsahuje derivaci vnitřní funkce. Proč?

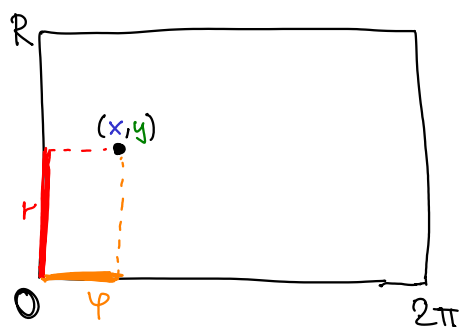
Mnohem názornější pro vícerozměrný integrál, chceme spočítat obsah kruhu o poloměru  $R$ :



Substituce do polárních souřadnic.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



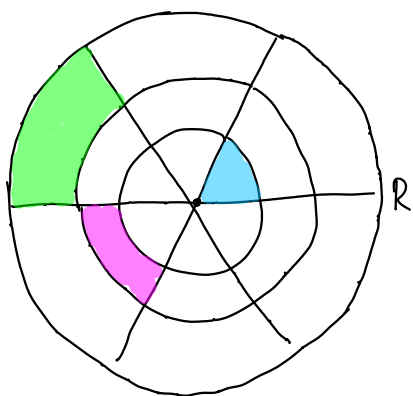
Stačí spočítat obsah obdélníka, což je  $2\pi R$ .

Ok, ale to je obvod kruhu, ne obsah. Kde jsme udělali chybu?

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq R} 1 \, dx \, dy$$

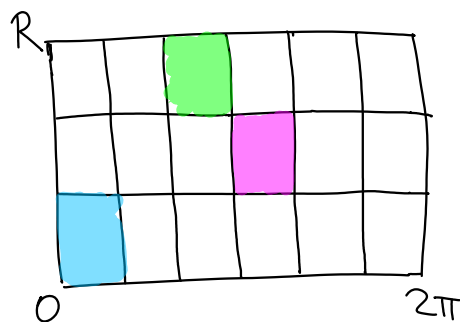
Toto lze spočítat, ale dělat nechceme.

Integrujeme obdélník tak, že ho nasekáme na malé obdélníčky, podíváme se na jejich vzory.



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



Vzory blíže středu mají menší obsah. Při integrování musíme vzít obdélníky lokální změnou obsahu substituce.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \det(J) \, dr \, d\varphi = \text{obsah kruhu}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \, d\varphi = \pi R^2$$



## Úvod do diferenciálních rovnic a vlastních čísel

Udělejme malou odbočku do světa analýzy, který úzce souvisí s lineární algebrou: řešení řady problémů analýzy vedlo k rozvoji lineární algebry.

~1600 Galileo Galilei

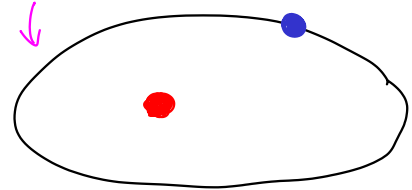
Při volném pádu se poloha mění kvadraticky.

~1670 Isaac Newton

Fyzika na Zemi a fyzika na nebi byla odlišná (věci vypadají zásadně odlišně). Planety mají dráhy podobné kruhům, což úplně nesedělo na pozorování.

Přesnější pozorování vedlo k modelu pohybu po elipsách, kde jsou planety v ohnisku.

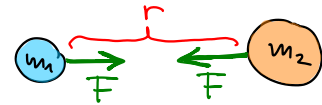
velice blízké kruhům



Newton spojil tyto dvě fyziky svojí mechanikou:

- Objekty mají pozice, rychlosti, působí na sebe silami.
- Dostáváme dynamický systém, Newtonovy zákony jsou jeho lokální změny.

Univerzální gravitace:  $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ .



Lokální změny vedou globálně k eliptickým orbitám.

Pro to musel Newton vymyslet analýzu, aby mohl složit lokální změny v globální chování systému.

Poincaré - snaha o hledání kvalitativních řešení, místo vzorečky, který neexistuje pro složité systémy. Kvalitativní řešení popisuje chování pro  $t \rightarrow \infty$ :

konvergence, oscilace, equilibria.



38 Geometrizace diferenciálních rovnic:

stavový prostor - prostor všech možných stavů dynamického systému.

System má **proměnné** & **parametry**.  
 (hodnot proměnných)  
 mění se v čase      neměnné, ale ovlivňují systém

<u>Příklady:</u>	proměnné	parametry	stavový prostor
kyvadlo	úhlová poloha úhlová rychlost	délka hmotnost	rychlost poloha } nekonečný vektor (povrch)
problém 2 těles	polohy rychlosti	hmotnosti těles	$\mathbb{R}^{12}$ 3x2 polohy } 3D 3x2 rychlosti }
problém 3 těles	polohy rychlosti	hmotnosti těles	$\mathbb{R}^{18}$ 3x3 polohy } 3D 3x3 rychlosti }

Determinismus ... z daného stavu je jednoznačně určena budoucnost a minulost systému.

Pro diferenciální rovnice platí, pokud jsou derivace malé.

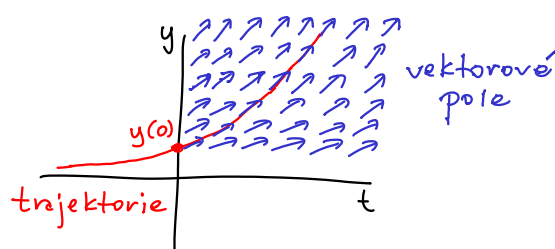
odpovídá trajektorii ve stavovém prostoru

Pro diferenciální rovnice máme vektorové pole, které je tečné k trajektorii v každém bodě.

Populační model

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y$$

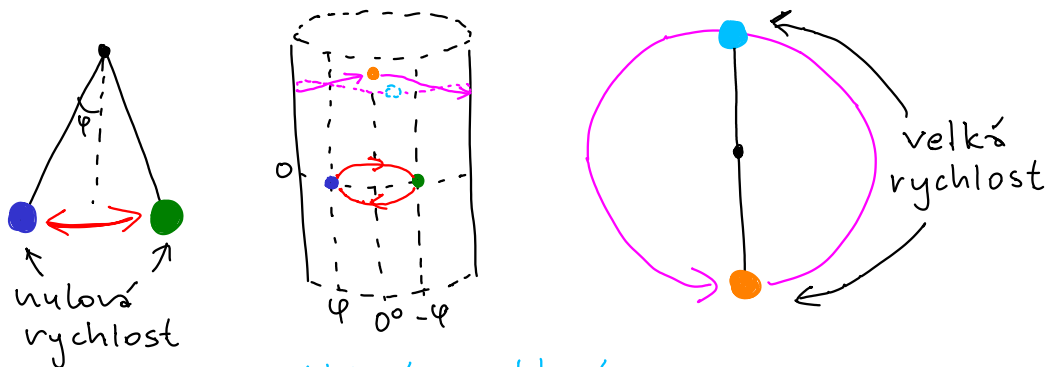
↑  
reprodukční faktor (parametr)



ne úplně stavový prostor:  $\mathbb{R}_1$ , proměnná velikost populace

Řešení:  $y = c \cdot e^{rt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = cr e^{rt} = r y$ .

Kyvadlo: Dva příklady trajektorií ve stavovém prostoru. [39]



$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\Theta = 0.$$

← gravitační zrychlení  
← délka kyvadla

$\Theta$  ... úhel v čase

Teorie chaosu: Existují velice jednoduché systémy s velice komplikovaným chováním. Platí, že dva libovolně blízké počáteční stavy mají zcela odlišnou budoucnost, amplifikují se rozdíly.

Příklady: Dvojkyvadlo, Lorenzova rovnice.

Klíčové: Lineární systémy diferenciálních rovnic lze řešit pomocí lineární algebry, nelineární systémy jsou typicky neřešitelné.

Vlastní čísla

Uvažme soustavu lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 4v - 5w \\ \frac{dw}{dt} &= 2v - 3w \end{aligned} ; \text{ v řeci matic } \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \text{ kde } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Derivace jsou lineární kombinace hledaných funkcí  $v(t)$  a  $w(t)$ .

40 Co kdyby existovalo řešení

$$u = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \text{ pro nějaké } \lambda \in \mathbb{R} ?$$

obdoba populačního modelu

můžeme vykrátit  $e^{\lambda t}$

$$A \cdot u = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \frac{du}{dt},$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } A \cdot x = \lambda x.$$

$x \neq 0$   
vlastní vektor

vlastní číslo

Stačí tedy najít vlastní čísla a vektory matice A.

Def.: Označme  $Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists x \neq 0, Ax = \lambda x \}$ . ← spektrum matice

① Když  $\lambda = 0$ , získáme rovnici  $Ax = 0$ , tedy  $x \in \text{Ker}(A)$ .

0 je vlastní číslo  $A \iff \text{Ker}(A)$  je netriviální.

② Uvažme matice  $A$  a  $A + dI$ .

Když  $Ax = \lambda x$ , potom  $(A + dI)x = Ax + dx = \lambda x + dx = (\lambda + d)x$ .

Tedy  $Sp(A + dI)$  vznikne z  $Sp(A)$  zvětšením o  $d$ .

Dohromady:

$$\lambda \in Sp(A) \iff A - \lambda I \text{ je singulární}$$

$$\iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

charakteristický polynom matice A

$$(-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu.

Pro matici  $n \times n$  jich vždy existuje přesně n.

Vratně se k matici A z motivace:

41

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \\ = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Tedy  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ .

Určíme vlastní vektory pomocí  $\text{Ker}(A - \lambda I)$ :

$$\begin{pmatrix} 4-2 & -5 & | & 0 \\ 2 & -3-2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & | & 0 \\ 2 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

musí být singulární

$$\begin{pmatrix} 4+1 & -5 & | & 0 \\ 2 & -3+1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:  $\mathbf{u} = d \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$ , kde  $d, B$  jsou konstanty podle počátečních podmínek  $\mathbf{u}(0)$ .

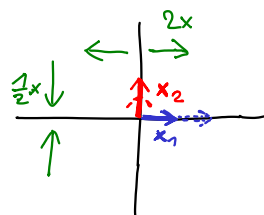
Geometrické příklady na maticích  $2 \times 2$ :

Pro  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \dots$   $\mathbf{x}$  je směr, kde  $A$  natahuje, ale nemění směr vektorů.  
↑ pouze pro  $\mathbb{R}$ ,  
v  $\mathbb{C}$  komplikované!

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \dots \text{identita}$$

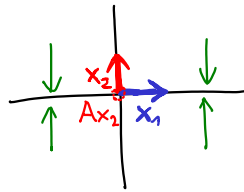
každý vektor je vlastní vektor,  $\mathbb{R}^2$   
 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix} \dots \text{natažení v osách}$$



$$\lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

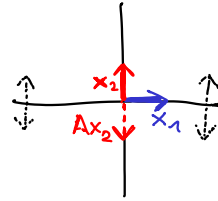
42  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$  ... kolmá projekce



$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$  ... zrcadlení



$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ... rotace o 90°

Stabilní směr není,  
ale existují vl. čísla v  $\mathbb{C}$ :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_1 = +i, \quad \lambda_2 = -i,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

algebraická násobnost

$\lambda = 1$  dvojnásobné,

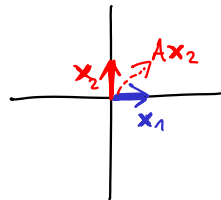
ale pouze jeden

vlastní vektor  $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

geometrická násobnost = 1

Násobení v  $\mathbb{C}$  jsou  
rotace a natahování,  
 $\langle x_1 \rangle$  a  $\langle x_2 \rangle$  jsou komplexní  
roviny, v nichž se rotuje.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  ... zkosení



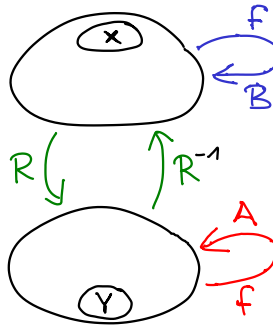
Existují degenerované matice, které nemají  
báze z vlastních vektorů. Jak uvidíme, jejich  
analýza je mnohem složitější.

## Diagonalizace a vlastnosti vlastních čísel

Připomeňme, že dvě matice  $A$  a  $B$  jsou podobné, pokud reprezentují stejné lineární zobrazení vůči různým bázím.

$$A = RBR^{-1}$$

matice přechodu od báze  $X$  k bázi  $Y$



Pouze pro čtvercové matice, reprezentují endomorfismy vůči jedné bázi.

V případě soustavy lineárních diferenciálních rovnic to odpovídá substituci: *derivace je lineární*

$$\frac{du}{dt} = Au \quad u = Rv, \quad \frac{dRv}{dt} = R \frac{dv}{dt} \Rightarrow R \frac{dv}{dt} = ARv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R^{-1}ARv.$$

Podobné matice mají stejná vlastní čísla:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow RBR^{-1}x = \lambda x$$

*vlastní vektor A*

$$BR^{-1}x = \lambda R^{-1}x$$


*příslušný vlastní vektor B*

Algebraická motivace pro studium vlastních čísel:

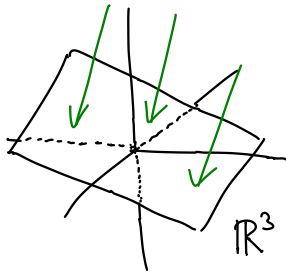
Chceme nalézt bázi, v které je matice reprezentující endomorfismus co nejjednodušší.

Předpokládejme, že existuje báze tvořená vlastními vektory  $x_1, \dots, x_n$ . Necht'  $A$  reprezentuje vůči kanonické bázi:

$$S = \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad AS = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & & | \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = \underbrace{S \Lambda S^{-1}}_{\text{diagonalizace}}$$

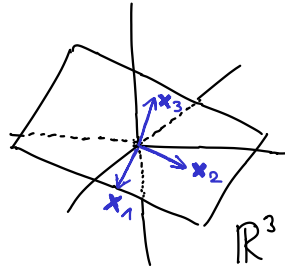
44  Matice je podobná diagonální matici  $\Leftrightarrow$  existuje báze z vlastních vektorů.

Příklad: Kolmá projekce na rovinu v  $\mathbb{R}^3$ .



v kanonické bázi složité matice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



pro vhodnou bázi  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma: Pokud  $Ax = \lambda x$  a  $Ax' = \lambda' x'$  a  $\lambda \neq \lambda'$ , potom jsou vlastní vektory  $x$  a  $x'$  lineárně nezávislé.

Důkaz: Necht'  $x = \alpha x'$ , potom  $\lambda x = Ax = \alpha Ax' = \alpha \lambda' x' = \lambda' x$ . Protože  $x \neq 0$ , je to spor s  $\lambda \neq \lambda'$ .  $\square$

Podobně platí pro více vlastních vektorů. Speciálně, pokud jsou vlastní čísla po dvou různá, má každé vlastní vektor, a tyto vektory tvoří bázi  $\Rightarrow$  diagonalizace.

Mocniny diagonalizovatelné matice

$$A^k = (S \Lambda S^{-1})^k = \underbrace{S \Lambda S^{-1} S \Lambda S^{-1} \dots S \Lambda S^{-1}}_{k\text{-krát}} = S \Lambda^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

stačí umocnit vlastní čísla na diagonále

Lineární diferenciální systémy

Diskrétní systém s  $n$  proměnnými, mění se v krocích  $y_0, y_1, \dots \in \mathbb{R}^n$

$y_0$ ;  
↑  
počáteční stav

$$y_{k+1} = Ay_k$$

↑  
 $n \times n$

nový stav závisí lineárně na předchozím stavu

Tedy  $y_k = A^k y_0$ .

Pokud je  $A$  diagonalizovatelná, potom lze vyřešit pomocí vlastních čísel:

$$y_k = S \Lambda^k S^{-1} y_0$$

Existují i obecné rozklady (Jordanova forma  $A = S^{-1} J S$ ).



Jiný popis: Nechtě  $x_1, \dots, x_n$  je báze vlastních vektorů [45]  
matice  $A$ , s vlastními čísly  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

$$y_0 = \sum \alpha_i x_i \Rightarrow y_k = A^k y_0 = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n A^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \alpha_i x_i.$$

Lze modelovat libovolnou lineární rekurenci (úkol)

Fibonacciho čísla:  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ .

Systém má 2 proměnné:  $y_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , platí

$$A y_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = y_{k+1}.$$

Nalezneme vlastní čísla a vektory  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(1-\lambda) - 1 = -\lambda^2 + \lambda - 1. \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{x_1} = -\lambda_2 \quad \text{zlato} \nearrow \text{řez} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & -1 \end{array} \right)$$

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k x_2. \quad \text{po substituci: } \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Tedy  $F_k$  získáme jako druhou souřadnici  $y_k$ :

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Součet a součin vlastních čísel:

Uvažme charakteristický polynom

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

Zjevně pro  $\lambda = 0$  platí, že  $\det(A) = \alpha_0$ . Na druhou stranu

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$$

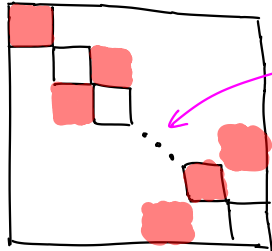
Proto  $\alpha_0 = \prod \lambda_i$  a  $\det(A)$  je součin vlastních čísel.

46 Součet vlastních čísel je také důležitý parametr.

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

proto  $\alpha_{n-1} = \sum \lambda_i$ . V  $A - \lambda I$  je  $\lambda$  pouze na diagonále.

Uvažme členy  $\det(A - \lambda I)$ :



na diagonále  
 $a_{i,i} - \lambda$

1) Permutace  $\sigma \neq \text{id}$ .

Potom  $\sigma$  obsahuje nejvýš  $n-2$  diagonálních členů, tedy stupeň  $\lambda$  je nejvýše  $n-2$ .

2) Permutace  $\sigma = \text{id}$ .

Potom je člen  $\det(A - \lambda I)$  roven

$$(a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \cdots (a_{n,n} - \lambda).$$

Aby bylo  $\lambda^{n-1}$ , musíme vybrat přesně jeden člen  $a_{i,i}$ , tedy  $\alpha_{n-1} = \sum a_{i,i} = \text{tr}(A)$ .  
stopa matice  $A \nearrow$

$$\text{Tedy } \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A) \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A).$$

Lze využít k verifikaci výpočtu a má teoretické důsledky.

Matice  $A$  a  $A^T$  mají stejná vlastní čísla:

$$\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I).$$

## Gershgorinova věta a analýza matic grafů

Nejprve ukažme odhad na vlastní čísla obecné matice:

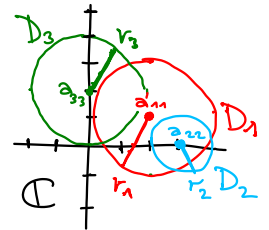
Gershgorinova věta: Necht'  $A$  je matice.

Uvažme disky  $D_i$  v komplexní rovině:

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & i \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2i \end{pmatrix}$$

střed  $D_i$  je  $a_{ii}$ , poloměr  $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ .

Potom každé vlastní číslo  $\lambda \in \cup D_i$ .

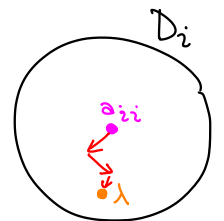


Důkaz: Pokud  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , existuje vlastní vektor  $x$ .

Necht'  $x_i$  je v absolutní hodnotě největší složka, uvažme vlastní vektor  $y = \frac{x}{x_i}$ . Platí, že  $|y_j| \leq 1$ ,  $y_i = 1$ .

$$\lambda = (Ay)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} y_j$$

nejvýše se vzdálíme  $r_i$  ze středu  
rotuje a možná zkrátí  $a_{ij}$   
střed disku  $D_i$

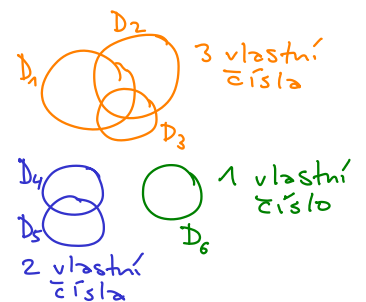


Proto  $\lambda \in D_i$ . □

Topologická varianta:

Uvažme komponenty disků  $D_i$  v rovině.

V každé komponentě je tolik vlastních čísel, kolik obsahuje disků.



Důkaz: Potřebujeme dva fakty:

- 1) Vlastní čísla jsou spojitá v koeficientech matice, neboť to jsou kořeny polynomu v koeficientech matice.
- 2) Vlastní čísla diagonální matice jsou koeficienty na diagonále. (Platí i pro trojúhelníkové matice.)

Necht'  $D$  je diagonální část  $A$ , uvažme spojitou transformaci

$$A(t) = tA + (1-t)D, \quad t \in [0, 1], \quad A(0) = D, \quad A(1) = A.$$

Každé vlastní číslo se spojitě posune z  $a_{ii}$  do  $\lambda$ , nemůže změnit komponentu disků. □



48 Důkaz, že všechna vlastní čísla reálné matice jsou reálná:

Nechť  $Ax = \lambda x$ ,  vynásobme zleva  $x^T$  :

$$x^T Ax = \lambda x^T x, \text{ neboli } \lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

To je podíl dvou reálných čísel, proto  $\lambda \in \mathbb{R}$ . □ ?

*Toto nemá smysl, třeba rotace o 90° má komplexní vlastní čísla. Důkaz je špatný!*

Problém je, že  $x$  může mít komplexní koeficienty.  
Lze však opravit pro symetrické matice.

Protože pracujeme v  $\mathbb{C}$ , budeme pracovat s jinou definicí skalárního součinu a normy:

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \quad \leftarrow \text{komplexní sdružení}$$
$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \dots + \overline{x_n} x_n}.$$

Pro matici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , definujme komplexní (Hermitovskou) transpozici  $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (někdy značená  $A^H$ ):

$$(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$$

Matice  $A$  je symetrická,  
pokud  $A = A^*$ . *← nutně reálná diagonála*

Platí, že  $\langle x | y \rangle = x^* y$  a  $\|x\| = \sqrt{x^* x}$ .

Věta: Symetrická matice  $A = A^*$  má všechna vlastní čísla reálná.

Důkaz: Stejně jako předtím  vynásobme  $Ax = \lambda x$  zleva  $x^*$  :

$$x^* Ax = \lambda x^* x, \text{ neboli } \lambda = \frac{x^* Ax}{x^* x}.$$

Jmenovatel je  $\|x\|^2$ , což je podle definice reálné číslo.

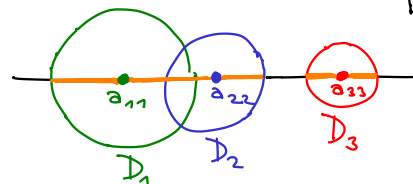
Čitatel je  $x^* Ax \in \mathbb{C}$ , uvažme jeho transpozici:

$$(x^* Ax)^* = x^* A^* (x^*)^* = x^* A^* x = x^* Ax. \quad \leftarrow \text{symetrie } A$$

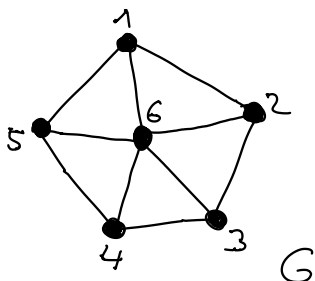
Proto  $x^* Ax \in \mathbb{R}$ , a tedy  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*tentokrát už správně*  
☺ ↪ □

Pro symetrické matice leží středy všech disků  $D_i$  z Gershgorinovy věty v  $\mathbb{R}$ , proto  $\lambda \in \cup D_i \cap \mathbb{R} = \cup [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i]$ .



Matice grafů: aplikujeme vlastní čísla



	1			1	1
1		1			1
	1		1		1
		1		1	1
1			1		1
1	1	1	1	1	

$A_G$

matice sousednosti

3	-1			-1	-1
-1	3	-1			-1
	-1	3	-1		-1
		-1	3	-1	-1
-1			-1	3	-1
-1	-1	-1	-1	-1	5

$L_G$

Laplaceova matice

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & ij \in E, \\ 0 & ij \notin E, \end{cases} \quad (L_G)_{ij} = \begin{cases} \text{deg}(i) & i=j, \\ -1 & ij \in E, \\ 0 & ij \notin E. \end{cases}$$

stupeň vrcholu  $i$

Z pohledu „matice = tabulka čísel“ je  $L_G$  redundantní. Avšak jsou to jiná lineární zobrazení, proto jejich analýza odhalí jiné vlastnosti  $G$ .

Nechť  $x$  je vektor ohodnocení vrcholů grafu.

Uvažme  $A_G x$  a  $L_G x$ :

$$(A_G x)_i = \sum_{ij \in E} x_j, \quad (L_G x)_i = \text{deg}(i) \cdot x_i - \sum_{ij \in E} x_j.$$

sčítáme ohodnocení sousedů
deg(i)-krát hodnota  $x_i$  minus průměr hodnot sousedů

Laplaceova matice grafu:

Diskretizace Laplaceova operátoru  $\Delta$ , důležitý pro fyziku a diferenciální rovnice. divergence gradientu

Ve 3D:  $\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla f(x,y,z).$

O kolik se liší hodnota  $f(x,y,z)$  od průměru na okolí.

50 Například rovnice tepla ve 3D:

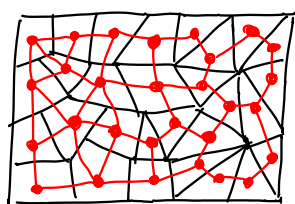
$h(x,y,z,t)$  ... teplota v bodě  $(x,y,z)$  v čase  $t$ .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta h.$$

← Bod mění svoji teplotu tím rychleji, čím je jeho teplota víc odlišná od průměru okolí.

Například Laplaceova rovnice  $\Delta h = 0$  hledá teplotní equilibrium s předepsanými okrajovými podmínkami.

$L_G$  je diskretizace  $\Delta$ :



difuze po hranách

Pro malé kousky prostoru předpokládáme konstantní teplotu.

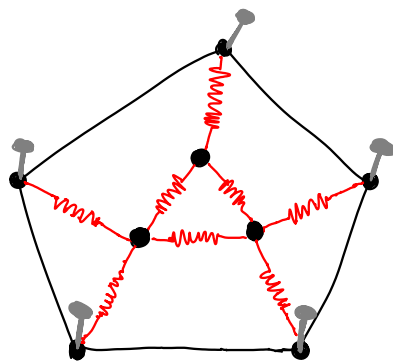
$L_G h$  je rozdíl teploty kusu  $h_i$  a průměru jeho sousedů.

Podle Gershgorinovy věty je  $\text{Sp}(L_G) \subseteq [0; 2\Delta(G)]$ .

Aplikace: Spektrální kreslení grafů

Laplaceovy matice lze využít ke kreslení grafů.

Tuttu (1963): Mějme 3-souvislý rovinný graf. Zvolme konvexní nakreslení vnější stěny. Pokud umístíme ostatní vrcholy do těžiště sousedů a nakreslíme hrany rovnými čarami, získáme rovinné nakreslení.



Necht  $x$  a  $y$  jsou vektory pozic vrcholů.

Fyzikální interpretace:

Vrcholy vnější stěny přišpendlíme, ostatní hrany nahradíme pružinami.

System minimalizuje potenciální energii

$$x^* L_G x + y^* L_G y = \sum_{i,j \in E} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

To umístí vnitřní vrcholy do těžiště jejich sousedů.

Vyřešíme pouze souřadnice  $x$ , pro  $y$  obdobně.

Předpokládejme, že vrcholy  $1, \dots, k$  jsou přispendleny.

Tedy  $x_1, \dots, x_k$  jsou předepsány a pro  $i > k$  má platit  $(L_G x)_i = 0$ .

Vyškrtnutím prvních  $k$  řádků a dosazením  $x_1, \dots, x_k$  získáme

$\rightarrow L'_G x' = b$ , Tutte dokázal, že  $L'_G$  je regulární  
 $(n-k) \times (n-k)$  a že získáme rovinné nakreslení.

Hallovo spektrální nakreslení:

Nechť  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$  jsou vlastní čísla  $L_G$   
 pro souvislý graf

a nechtě  $u_1, \dots, u_n$  jsou příslušné vlastní vektory.

Obecný graf lze nakreslit umístěním vrcholů na  $(u_{n-1}, u_{n-2})$   
 a nakreslením hran rovnými čárami.

Proč to dává smysl?

$L_G u_{n-1} = \lambda_{n-1} u_{n-1}$   
 $L_G u_{n-2} = \lambda_{n-2} u_{n-2}$  } Pokud jsou  $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}$  malé, je pravá strana blízka 0, tedy většina vrcholů je blízko těžiště sousedů.

Matice sousednosti grafu:

Uvažme  $A_G^k e_i$ , mocniny propagují jedničku v grafu.

$(A_G^k e_i)_j = (A_G^k)_{ij}$  je počet sledů mezi  $i$  a  $j$  délky  $k$ .

Například můžeme určit centrum grafu jako vrcholy,

co maximalizují diagonálu  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_G^k}{k!} = e^{A_G}$ .  
 dělíme, aby to nebylo moc velké  $\leftarrow$  V centru jsou vrcholy, co mají nejvíc sledů  $i \rightarrow i$ .

Lze využít k modelování náhodných procházek.

Pravděpodobnost je určena k modelování složitého reálného světa. Například hod kostky neumíme předpovědět, ale lze udělat model:  $1/6$  na každou hodnotu.  
 Prozradí statistické chování kostky.

52 Náhodná procházka popisuje pohyb částice.  
 Necht'  $P_G$  vznikne z  $A_G$  vydělením každého sloupce pomocí  $\deg(i)$ .

Pravděpodobnostní distribuce:  $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1$ .

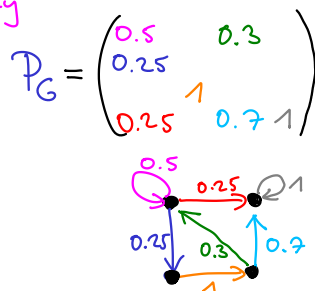
System lineárních diferencí:

$x_0$  ... počáteční distribuce,  
 třeba  $e_i$ ,

$$x_k = P_G x_{k-1} = P_G^k x_0.$$

krok náhodné procházky

Místo grafu můžeme uvažovat i obecný Markovský proces  $P_G$ , což je nezáporná matice se součty 1 ve všech sloupcích.



Předpokládejme, že existuje báze z vlastních vektorů  $y_1, \dots, y_n$  s vlastními čísly  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , že  $x_0 = \sum \alpha_i y_i$ .  
 Již víme, že  $x_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k y_i$ .

Chceme analyzovat  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} P_G^k x_0$ . Podle Gershgorinovy věty (aplikované na  $P_G^T$ ) víme, že  $|\lambda_i| \leq 1$ , a vždycky existuje  $y_1$ , že  $\lambda_1 = 1$ . Pro jednoduchost se zaměříme na d-regulární grafy, potom  $P_G = \frac{1}{d} A_G$  je symetrická. Tedy  $\lambda_i \in [-1, 1]$  a necht'  $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  a  $y_1 = \mathbf{1}$ .  
vektor jedniček

Obecně konvergence  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k z$  závisí na spektrálním radiu  $\rho(A) = \max |\lambda_i|$ .

- $\rho(A) < 1 \Rightarrow \lim A^k z = 0$
- $\rho(A) = 1 \Rightarrow$  složité chování (konvergence, oscilace)
- $\rho(A) > 1 \Rightarrow$  divergence

Pokud  $\lambda_2 < 1, \lambda_n > -1$  (když je G souvislý nebipartitní), potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_G^k x_0 = y_1.$$

↑  
 v sumě  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k y_i$  převládne první člen



## Schurův a spektrální rozklad matice

Připomeňme algebraickou motivaci:

Podobnost: stejné lineární zobrazení vůči různým bázím,

$$A = SBS^{-1} \quad \leftarrow \text{chceme najít co nejjednodušší matici } B$$

Víme, že  $B$  může být diagonální, právě když existuje báze  $S$  z vlastních vektorů.

① Jaký je nejjednodušší tvar, když taková báze neexistuje?

• Jordanova normální forma  $A = SJS^{-1}$  ↖ přístě

• Schurův rozklad  $A = QUQ^*$

↑  
ortogonální báze  
(unitární)

□ horní  
trojúhelníková

② Co když chceme extra podmínky? Třeba aby byla báze ortogonální. Kdy existuje?

• Uvedený Schurův rozklad existuje vždy.

• Spektrální rozklad  $A = Q\Lambda Q^*$  existuje, právě když  $A$  je normální:  $A^*A = AA^*$ .

□ diagonální

Schurův rozklad

Věta: Pro libovolnou matici  $A$  existuje Schurův rozklad

$$A = QUQ^*$$

Důkaz: Chceme  $AQ = QU$ .

Nechť  $Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ .

↑  
diagonála  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Budeme  $Q$  budovat postupně indukcí podle velikosti  $A$ .

54 Má platit, že

$$Aq_i = \lambda_i q_i + \sum_{j < i} u_{j,i} q_j.$$

Speciálně  $q_1$  má být vlastní vektor  $A$ . Protože ten vždy existuje, zvolme jako  $q_1$  libovolný vlastní vektor normy jedna.

Jak dál? Nemusí existovat vlastní vektor  $q_2$  nezávislý na  $q_1$ , navíc chceme kolmost.

Zatím ignorujme a doplňme na libovolnou ortogonální bázi.

$$A \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix}_{Q_1} = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix}_{Q_1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & ? \\ | & \hat{U}_1 \\ 0 & | \end{bmatrix}$$

← Nejsou nuly, ale to je v pohodě.  
 ← Musíme se zbavit nul pod diagonálou.

Nulové koeficienty z ortogonality:

$$q_i^* A q_1 = \lambda_1 q_i^* q_1 = 0.$$

Protože  $\hat{U}_1$  je menší matice  $(n-1) \times (n-1)$ , můžeme aplikovat indukční předpoklad a víme:

násobení blokových matic, rozmyslete si

$$\hat{U}_1 = \hat{Q}_2 \hat{U} \hat{Q}_2^*,$$

Schurův rozklad

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & ? \\ | & \hat{U}_1 \\ 0 & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0- \\ | & \hat{Q}_2 \\ 0 & | \end{bmatrix}_{Q_2} = \begin{bmatrix} 1 & -0- \\ | & \hat{Q}_2 \\ 0 & | \end{bmatrix}_{Q_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & ? \\ | & \hat{U} \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix}_{Q_1} \begin{bmatrix} 1 & -0- \\ | & \hat{Q}_2 \\ 0 & | \end{bmatrix}_{Q_2} = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix}_{Q_1} \begin{bmatrix} 1 & -0- \\ | & \hat{Q}_2 \\ 0 & | \end{bmatrix}_{Q_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & ? \\ | & \hat{U} \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

tedy  $Q = Q_1 Q_2$  a  $A = Q U Q^*$ . □

### Geometrická interpretace

Každé lineární zobrazení lze rozložit na natahování, rotace ( $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ ) a kosení  $x_i \mapsto x_i + x_j$ , kde  $j < i$ .

## Normalita.

55

Matice  $A$  je normální, pokud  $A^*A = AA^*$ . Definice vypadá zvláště, ale je to hluboká geometrická vlastnost. Matice komutuje s transpozicí (duálním zobrazením).

Nechť  $r_1, \dots, r_n$  jsou řádky  $A$  a  $s_1, \dots, s_n$  sloupce  $A$ .

Potom z normality platí:

$$(A^*A)_{ij} = s_i^* s_j = r_i^* r_j = (AA^*)_{ij}, \text{ speciálně } \|r_i\| = \|s_i\|.$$

↑ normální matice mají stejné úhly a délky u řádkových a sloupcových vektorů

## Spektrální rozklad

Věta: Pro matici  $A$  existuje spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^*,$$

právě když  $A$  je normální.

Důkaz: " $\Rightarrow$ ": Pokud  $A = Q \Lambda Q^*$ , potom  $A^* = Q \Lambda^* Q^*$ .

$$A^*A = Q \Lambda^* Q^* Q \Lambda Q^* = Q \underbrace{\Lambda^* \Lambda}_{\text{komutuje}} Q^* = Q \Lambda \Lambda^* Q^* = Q \Lambda Q^* Q \Lambda^* Q^* = A A^*.$$

" $\Leftarrow$ ": Uvažme Schurův rozklad  $A = Q U Q^*$ . Tvrdíme, že  $U$  je diagonální matice  $\Lambda$ .

$$A^* = Q U^* Q^*.$$

□, není to Schurův rozklad

Dokážeme ve dvou krocích:

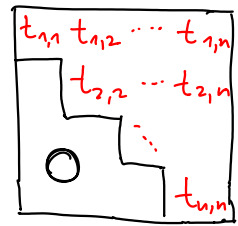
①  $U$  je normální.

$$\left. \begin{aligned} U &= Q^* A Q, \\ U^* &= Q^* A^* Q. \end{aligned} \right\} \text{ zbytek důkazu jako výše, vynásobení a normalita } A$$

56 ② Pokud je trojúhelníková matice  $T$  normální,  
potom je diagonální.

Vzpomeňme si, že  $\|r_i\| = \|s_i\|$ . Speciálně

$$\sqrt{t_{1,1}\overline{t_{1,1}}} = \|s_1\| = \|r_1\| = \sqrt{t_{1,1}\overline{t_{1,1}} + \dots + t_{1,n}\overline{t_{1,n}}},$$



tedy  $t_{1,2}, \dots, t_{1,n} = 0$ . Podobně další řádky a sloupce.

Tedy Schurův rozklad je spektrální a  $A = Q\Lambda Q^*$ .  $\square$

Proč chceme najít ortogonální báze  $q_1, \dots, q_n$  z  
vlastních vektorů?

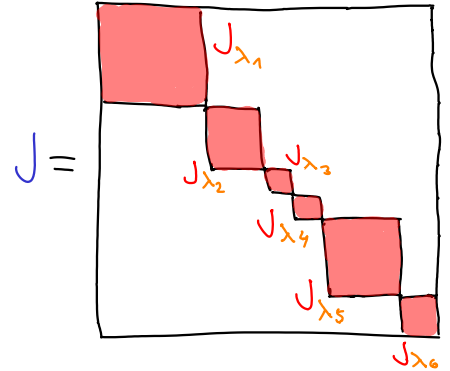
① Jednoduché vyjádření souřadnic  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i$   
pomocí  $\alpha = Q^* x$ .

② Lokální změna  $x$  uměrně změni souřadnice  $\alpha$ .  
Z toho plynou dobré numerické vlastnosti rozkladů.  
Například Schurův rozklad je spojitý v koeficientech  
matice  $A$ .

5.5.2015 - 11. cvičení

## Nenormální matice a Jordanova normální forma

Dokážeme, že libovolnou matici lze skoro diagonalizovat.Jordanova normální forma.Blokově diagonální matice  $J$ .Každý blok je Jordanova buňka

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$
 nějaké velikosti  $k \times k$ .
Věta: Pro libovolnou matici existuje Jordanova forma

$$A = SJS^{-1}$$

Sloupce matice  $S$  obsahují zobecněné vlastní vektory  $x_1, \dots, x_n$ . Označme vlastní čísla na diagonále  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Z  $AS = SJ$  vyplývá, že

$$Ax_i = \begin{cases} \lambda_i x_i, & \text{pokud začíná Jordanova buňka,} \\ \lambda_i x_i + x_{i-1}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

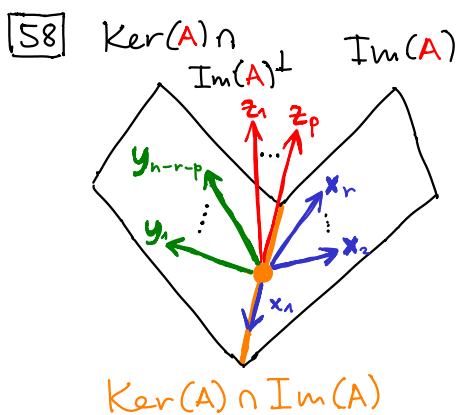
$x_i$  je vlastní vektor  
 $x_i$  je zobecněný vlastní vektor  
 $\hookrightarrow$  tvoří řetězky navěšené na vlastní vektory

Rozklad popisuje  $A$  vůči jiné bázi jako kombinaci natahování a rotací (vlastní vektory) a kosení (zobecněné vlastní vektory).

Důkaz: Budeme nejprve předpokládat, že  $A$  je singulární. Označme

$$\dim \text{Im}(A) = r < n, \quad \dim \text{Ker}(A) = n - r > 0,$$

$$\dim \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A) = p.$$



①  $\text{Im}(A)$  je invariantní podprostor matice  $A$ :  $\forall x \in \text{Im}(A) \quad Ax \in \text{Im}(A)$

Proto  $B = A|_{\text{Im}(A)}$  je lineární zobrazení  $\text{Im}(A) \rightarrow \text{Im}(A)$ , které je reprezentované maticí  $r \times r$ .

Z indukčního předpokladu existuje Jordanova forma  $B$  s bází  $x_1, \dots, x_r \in \text{Im}(A)$  ze zobecněných vlastních vektorů  $B$  (také  $A$ ). Tedy  $Ax_i = \begin{cases} \lambda_i x_i, \\ \lambda_i x_i + x_{i-1}. \end{cases}$  nebo  
Musíme je doplnit na bázi  $\mathbb{C}^n$ .

② Každý vektor z  $\text{Ker}(A)$  je vlastní vektor  $A$ .  
Zvolme v  $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)^\perp$  libovolnou bázi  $y_1, \dots, y_{n-r-p}$ .  
Tyto vektory jsou určitě lineárně nezávislé s  $x_1, \dots, x_r$ .

③ Chybí nalézt  $p$  dalších zobecněných vlastních vektorů,  
bohužel je nelze zvolit z  $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$  kvůli nezávislosti s  $x_1, \dots, x_r$ . Musíme konečně něco udělat.

Platí, že  $p$  vektorů z  $x_1, \dots, x_r$  leží v  $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$ .  
Proč? Obecně, pokud  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = k$ , libovolná báze zobecněných vlastních vektorů obsahuje  $k$  vlastních vektorů z  $\text{Ker}(A - \lambda I)$ . Můžeme toto přidat jako indukční předpoklad, konstrukce  $y_i$  to zachová. Platí, že  $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$ .  
Pokud výše uvedený postup aplikujeme na  $B$ , obsahují vektory  $x_1, \dots, x_r$  bázi  $\text{Ker}(B)$ .

Tedy mezi  $x_1, \dots, x_r$  nalezneme  $p$  řetězků začínajících v  $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$ , odpovídající buňkám  $J_0$ . Nechť  $x_j$  je poslední vektor  $i$ -tého z těchto řetězků. Protože  $x_j \in \text{Im}(A)$ , zvolme  $z_i$  jako jeho libovolný vzor:  $Az_i = x_j$ .

Volbou  $z_1, \dots, z_p$  jsme jednotlivé řetězky prodloužili [59]  
o jedna, tedy tato část důkazu vytváří netriviální  
Jordanovy buňky.

Zjevně  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r-p}, z_1, \dots, z_p$  jsou zobecněné vlastní  
vektory.

Zbývá dokázat jejich nezávislost:

$$0 = \sum_{i \in \text{Im}(A)} \alpha_i x_i + \sum_{i \in \text{Ker}(A)} \beta_i y_i + \sum_{i \in \mathbb{C}^n} \gamma_i z_i.$$

} vynásobme A zleva  
(neekvivalentní úprava)

$$0 = \sum \alpha_i A x_i + \sum \beta_i A y_i + \sum \gamma_i A z_i =$$

$$= \sum \alpha_i \begin{cases} \lambda_i x_i \\ \lambda_i x_i + x_{i-1} \end{cases} + 0 + \sum \gamma_i x_j.$$

↑  
přes konce řetězku  $J_0$

← Tyto vektory  $x_j$  se nikde neobjevují v levé sumě, protože  
 $A x_j = \begin{cases} 0, & \leftarrow \text{nebo} \\ x_{j-1}. & \leftarrow \end{cases}$

Protože  $x_1, \dots, x_r$  jsou lineárně nezávislé, jsou  $\gamma_i = 0$ . To ale ještě nevíme o  $\alpha_i$ , protože některé  $x_i$  se objevují vlevo dvakrát. Obrazy  $A x_i$  mohou být závislé.

Vraťme se zpět:

$$0 = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_i y_i + \sum 0 z_i = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_i y_i.$$

Avšak  $y_i$  jsme volili tak, aby byly nezávislé s  $x_i$ .

Proto  $\alpha_i = 0$  a  $\beta_i = 0$ .

Co když je A regulární?

Pro každou matici existuje vlastní číslo  $\lambda$ , pro které je  $A - \lambda I$  singulární. Pro ní podle důkazu existuje  
Jordanova normální forma: } vytváří netriviální buňky  $J_\lambda$ .

$$A - \lambda I = S J S^{-1} \Rightarrow S (J + \lambda I) S^{-1} = A - \lambda I + \lambda I = A.$$

Tedy  $S (J + \lambda I) S^{-1}$  je Jordanova normální forma  $A$ . □

## 60 Poznámky k větě:

- Pokud důkaz aplikujeme na symetrickou matici  $A=A^*$ , je  $\text{Im}(A) = \mathcal{Q}^*(A)$ , což je to ortogonální doplněk  $\text{Ker}(A)$ . Tedy  $p=0$  a řetězky se neprodlužují. Stačí dokázat, že  $B = A \upharpoonright \text{Im}(A)$  je symetrická matice:

$B^*$  je jediná matice, že  $\langle Bx | y \rangle = \langle x | B^*y \rangle, \forall x, y \in \text{Im}(A)$ .

↑ symetrie se přenesla z  $A$

Proto  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}$  tvoří bázi z vlastních vektorů, která je snadno ortogonální. To je spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^*$$

- V důkazu vůbec nepotřebujeme determinant, stačí existence jednoho vlastního čísla na konci důkazu.

Nechť  $\lambda_i$  je vlastní číslo:

→ geometrická násobnost  $d_i$ :  $\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)$ , což je počet nezávislých vlastních vektorů. Také je to počet Jordanových buněk  $J_{\lambda_i}$ .

→ algebraická násobnost  $\mathcal{B}_i$ : součet velikostí  $J_{\lambda_i}$ , dimenze podprostoru generovaného zobecněnými vlastními vektory čísla  $\lambda_i$ .

Platí  $d_i \leq \mathcal{B}_i$  a  $\mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_k = n$ .

↑ protože zobecněné vlastní vektory tvoří bázi

Determinant tedy vůbec nepotřebujeme pro vlastní čísla, lze budovat teorii bez něj. Můžeme definovat

$$\det(A) = \prod \lambda_i^{\mathcal{B}_i}$$



• Minimální polynom  $M_A(x) = \prod (x - \lambda_i)^{\nu_i}$  ← velikost největší buňky  $\lambda_i$ ,  $\nu_i \leq \beta_i$ .

Charakteristický polynom  $P_A(x) = \prod (x - \lambda_i)^{\beta_i}$

$M_A$  je polynom  $x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \dots + a_0$  nejmenšího stupně  $l$ , že platí  $M_A(A) = 0$ .  $M_A$  je důležitý strukturálně. Platí, že pokud  $P(A) = 0$ , potom  $M_A$  dělí polynom  $P$ .

Hierarchie matic podle vlastních čísel

Srovnáme matice podle toho, jak je umíme pochopit z vlastních čísel.

matice	vlastní čísla	víme o nich
symetrické pozitivně definitní	$\lambda_i \geq 0$	Další specifické vlastnosti, <u>více později</u> .
symetrické $A = A^*$	$\lambda_i \in \mathbb{R}$	Stačí <u>pouze natahování</u> , <u>žádné rotace</u> .
normální $A^*A = AA^*$	spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^*$	Vlastní čísla <u>poví</u> o matici <u>strukturálně</u> <u>vše</u> , stačí $Sp(A)$ .
nenormální $A^*A \neq AA^*$	Jordanova forma $A = SJS^{-1}$	Vlastní čísla neřeknou moc i pro diagonalizaci, musíme znát úhly mezi vlastními vektory.

Jak analyzovat nenormální matice?

Moc se to neumí, dnes aktivní výzkum.

Dvě zobecnění  $Sp(A)$ :

pseudospektrum a numerický rozsah.

62 Numerický rozsah:

Pokud  $Ax = \lambda x$ , potom

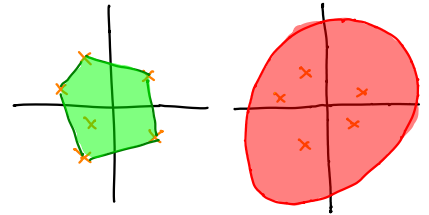
$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda$ . ← Rayleighho kvocient

Toto lze použít k definici numerického rozsahu:

$W(A) = \left\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} : x \neq 0 \right\} = \{x^*Ax : \|x\|=1\} \subseteq \mathbb{C}$ .

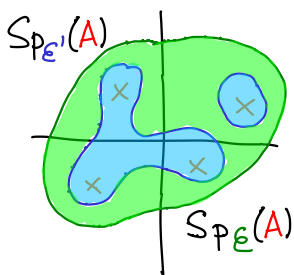
$W(A)$  je vždy konvexní a obsahuje vlastní čísla.

Pro normální matici je to konvexní obal vlastních čísel, pro nenormální matice je větší.



Pseudospektrum:

$Sp_\epsilon(A) = \{ \lambda : \lambda \text{ je vlastní číslo } A+E, \|E\| \leq \epsilon \}$ .



$0 < \epsilon' < \epsilon$   
 $\downarrow$   
 $Sp_{\epsilon'}(A) \subseteq Sp_\epsilon(A)$ .

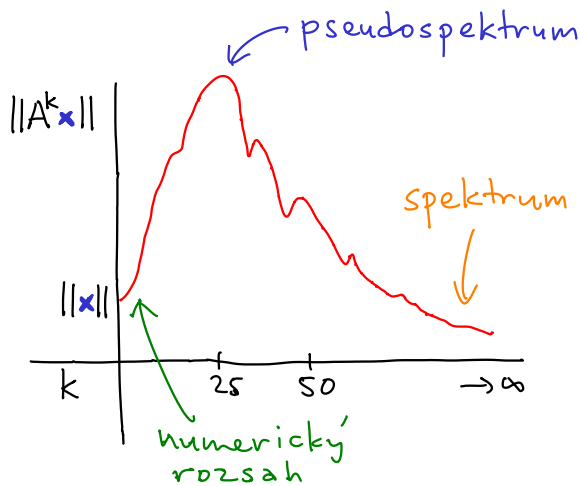
Jak moc se  $\uparrow$  změní vlastní čísla malou perturbací (kde  $\|E\|$  je operátorová norma matice).

Příklad: ← spectrální radius  $\rho(A) = \max_{x \in Sp(A)} |\lambda|$

Pokud  $\rho(A) < 1$ , víme, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0$ .

Ale pokud je  $A$  nenormální, třeba  $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 10^5 \\ & 0.9 \end{pmatrix}$ , může konvergence dlouho trvat.

$A^{25} \approx \begin{pmatrix} 0.07 & 2 \cdot 10^5 \\ & 0.07 \end{pmatrix}$ , tedy často  $\|A^{25}x\| > \|x\|$ .



Nelze analyzovat začátek jen z vlastních čísel, prozradí pouze asymptotické chování.

## Fourierova transformace v řeči lineární algebry

Fourierova řada

Mějme  $2\pi$ -periodickou funkci  $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ .

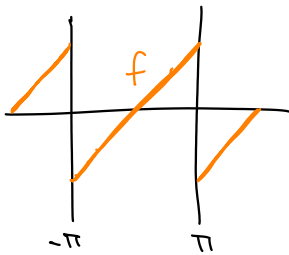
konkrétní hodnota periody není klíčová

Za určitých podmínek (docela složité) lze zapsat  $f$  jako součet řady:

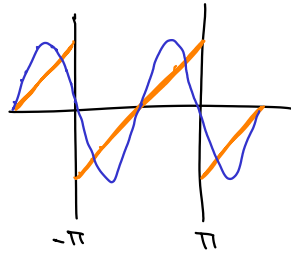
$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Příklad:

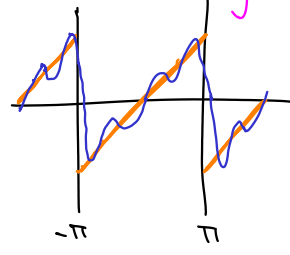
částečné součty řady



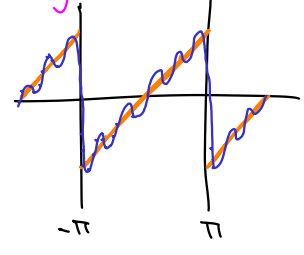
funkce pila



k=1



k=3



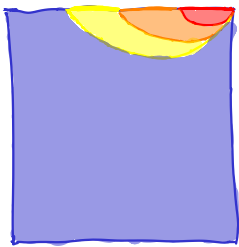
k=5

Motivace

Funkci  $f$  lze rozložit na vlny, koeficienty  $a_k, b_k$  jsou amplitudy. Důležité pro analýzu signálů.

Fourierova motivace byla pro řešení diferenciálních rovnic.

Rovnice tepla  $\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta h$  ve 2D. Chceme equilibrium



hodnoty  $\Delta h = 0$  s okrajovými podmínkami.  
na okraji předepsané, odpovídají zdroji tepla, uvnitř chceme teploty zprůměrovat

Znaly se řešení, pokud zdroje tepla byly siny a cosiny. Fourier vymyslel, že tato řešení jde sečíst pro obecný zdroj  $f$ .

Například na čtverci  $[0; \pi] \times [0; \pi]$ ,

kde nahoře rostou teploty lineárně

$h(x, \pi) = x$ , jinde na hranici nuly:

$$h(x, y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \frac{\sinh(ky)}{\sinh(k\pi)}$$

neexistuje jednodušší forma

64 Uvažme jednodušší problém:

$\frac{d^2 y}{dx^2} = f$ , to je soustava lineárních rovnic  $\frac{d^2}{dx^2} y = f$ .  
lineární operátor  
právní strana

To odpovídá  $Ax = b$  na prostoru funkcí. Protože má nekonečnou dimenzi, nejde aplikovat Gaussovku.

Kdyby  $b$  byl vlastní vektor  $A$ , potom hned víme, že  $x = \frac{b}{\lambda}$ .

Nechť  $y_1, \dots, y_n$  je báze z vlastních vektorů,

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jsou jejich vlastní čísla.

$Ax = b$  lze řešit ve dvou krocích:

① Vyjádníme  $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ .

② Získáme řešení  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{y_i}{\lambda_i}$ .

Jak to pomůže v řešení  $\frac{d^2}{dx^2} y = f$ ?

Funkce  $\cos(kx)$  a  $\sin(kx)$  jsou vlastní vektory  $\frac{d^2}{dx^2}$ , někdy se jim říká vlastní funkce:

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos(kx) = -k^2 \cos(kx), \quad \frac{d^2}{dx^2} \sin(kx) = -k^2 \sin(kx).$$

Tedy pokud  $f \in \langle \frac{1}{2}, \cos(kx), \sin(kx) : k \geq 1 \rangle$ , lze využít ② a nalézt funkci  $y$ .

Z tohoto důvodu je klíčové zkoumat vlastní funkce a čísla operátorů derivace a dalších. ← klíčové téma funkcionální analýzy

• Třeba vlastní funkce  $\frac{d}{dx}$  jsou exponenciely  $e^{\lambda x}$ , neboť  
$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Dále  $\frac{d}{dx} x^k e^{\lambda x} = \lambda x^k e^{\lambda x} + k x^{k-1} e^{\lambda x}$ , to jsou řetězky v Jordanově normální formě. Proto se exponenciely tak často objevují při řešení diferenciálních rovnic.

Tím tedy lze aplikovat ②, za předpokladu, že umíme vyjádřit  $\mathbf{b} = \sum \alpha_i \mathbf{y}_i$  v kroku ①, což vede na  $Y\mathbf{d} = \mathbf{b}$ . Pro nekonečně mnoho dimenzí by to byla soustava řad, nevíme jak řešit.

Druhá klíčová vlastnost Fourierovy řady: ortogonalita.

Uvažme standardní skalární součin  $\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ .

Funkce  $\frac{1}{2}$ ,  $\cos(kx)$ ,  $\sin(kx)$  jsou ortogonální, neboť

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(\ell x) = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(\ell x) = 0, \quad \dots$$

$k \neq \ell$

↑ výpočet je standardní pomocí per partes

Dále  $\|\cos(kx)\| = \|\sin(kx)\| = \sqrt{\pi}$ .

Proto lze koeficienty  $\sum \alpha_i \mathbf{y}_i$ , tedy  $a_k$  a  $b_k$ , určit pomocí kolmých projekcí na osy  $\mathbf{y}_i$ , tedy  $\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{y}_i \rangle}{\|\mathbf{y}_i\|^2}$ :

$$a_k = \frac{\langle f | \cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Fourierova báze  $\frac{1}{2}$ ,  $\cos(kx)$ ,  $\sin(kx)$  je ortogonální báze z vlastních vektorů operátoru  $\frac{d^2}{dx^2}$ .

↑ Pojem báze je v nekonečně dimenzích složitý, musí se řešit druh konvergence (bodová, stejnosměrná), existence limity, pouze na určitých podprostorech.

Fourierova transformace je přechod do Fourierovy báze. Lze volit i jiné podobné báze, studuje harmonická analýza.

Spojitá:  $\{e^{-2\pi i x \xi} : \xi \in \mathbb{R}\}$ , diskrétní:  $\{e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} : 0 \leq k < N\}$ .

↑ Transformace  $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ , rychlá!

66 Ukažme na závěr jednoduchou teoretickou aplikaci Fourierovy řady na řešení basilejského problému:

Víme, že  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c}$  konverguje, právě když  $c > 1$ .

Tedy  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ , ← harmonická řada diverguje

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , ← basilejský problém

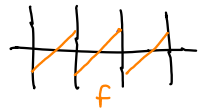
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \notin \mathbb{Q}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} = ?$ , ...

↑ není známo přesně      všechny sudé mocniny lze řešit podobně      ↑ není známo

Lemma:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Důkaz: Použijeme Fourierovu řadu funkce pila

$$f(x) = x \text{ pro } x \in (-\pi; \pi].$$



$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) dx = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

↑ lichá funkce na symetrickém intervalu      ↑ snadný výpočet integrálu

Nyní aplikujeme Pythagorovu větu:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \|\sin(kx)\|^2.$$

← pro nekonečně mnoho dimenzí

Levá strana:  $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3.$

Pravá strana:  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \|\sin(kx)\|^2 = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$

↑  $\frac{4}{k^2}$       ↑  $\pi$

Proto  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

□

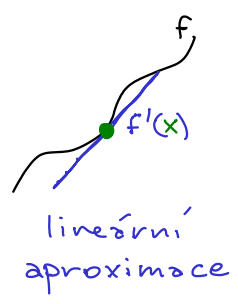
12.5.2015 - 13. cvičení

Positivně definitní matice: extrémů a energie

Hledání extrémů funkcí

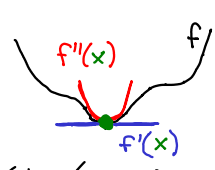
Pro jednu proměnnou lze použít derivace.

Kandidáti: Body  $x$  s  $f'(x) = 0$ .  $\rightarrow$  jinak by nemohl být extrém



Test pomocí druhých derivací:

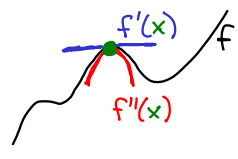
$f''(x) > 0$



lokální minimum

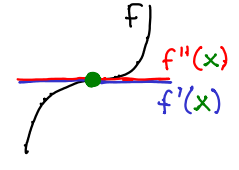
kvadratická aproximace

$f''(x) < 0$



lokální maximum

$f''(x) = 0$



nevíme, může být inflexní bod, nebo extrém:  $x^3$  vs.  $x^4$ .

Můžeme derivovat dál a dozvědět se.

Proč to funguje? Derivace popisují nejlepší lokální aproximace polynomelem. Tento polynom se nazývá Taylorův polynom.

Předpokládejme, že  $x=0$  je kandidát:

$T_f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$

na extrémů nemá vliv

lokálně převládne první nenulový člen  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ :

- k liché: inflexní bod,
- k sudé: extrém, podle znaménka.

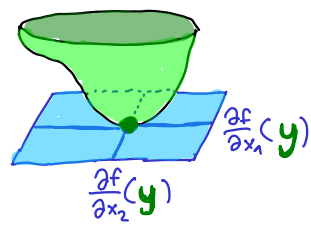
Hledání extrémů funkcí více proměnných  $f(x_1, \dots, x_n)$

Lze použít parciální derivace, ale je to trochu složitější.

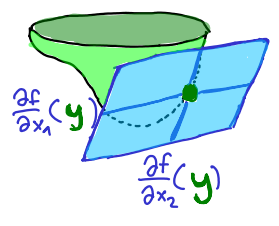
1. Přiložíme tečnou rovinu.

Kandidáti:  $\forall y \in \mathbb{R}^n$ , že

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(y) = 0.$



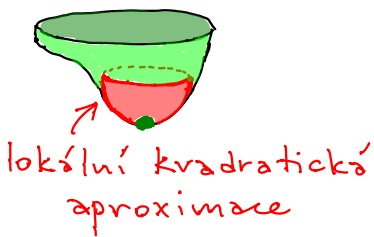
kandidát



není extrém

68 (2) Přiložíme tečný kvadratický polynom.

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \sum_i \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i^2} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j.$$



koeficienty

Zajímá nás lokální chování  $P(\mathbf{x})$ , stejně jako globální chování.

Možnosti:

$P(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$  pozitivně definitní

lokální minimum

$P(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$  negativně definitní

lokální maximum

$P(\mathbf{x}) \geq 0$  pozitivně semidefinitní

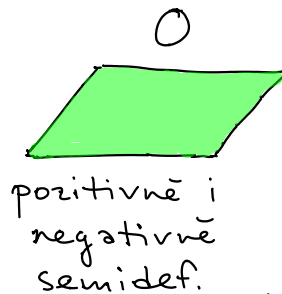
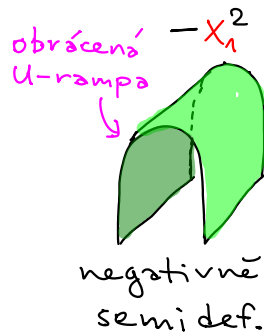
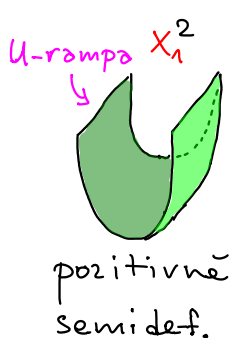
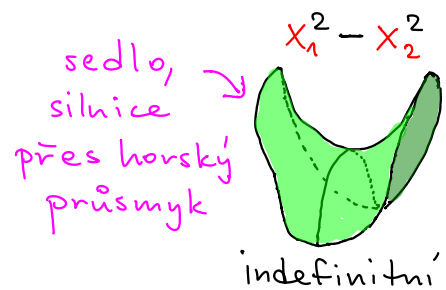
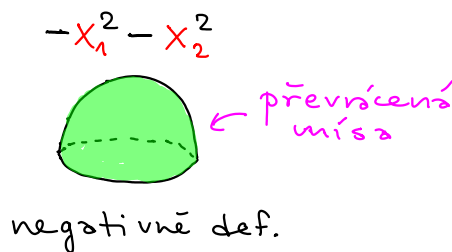
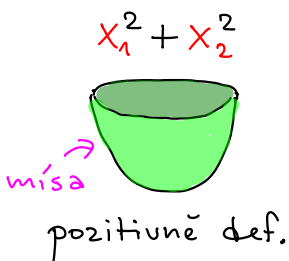
} nevíme, derivace vyšších řádu

$P(\mathbf{x}) \leq 0$  negativně semidefinitní

$\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad P(\mathbf{x}) < 0, P(\mathbf{y}) > 0$  indefinitní

není extrém

Příklady  $P(x_1, x_2)$ , existuje šest typů:



Všechno pro dvě proměnné, podle Sylvesterovy věty.

Třeba  $P(x_1, x_2) = x_1 x_2$  je sedlo otočené o 45°.

Jak ale zjistit typ daného polynomu?

Pomocí technik lineární algebry.

Ostatně hodně jí vzniklo jako nástroje analýzy.



Mějme  $P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ . Necht'  $a_{ij}$  jsou koeficienty matice  $A$ . Potom

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}.$$

Budeme předpokládat, že matice  $A$  je symetrická, tedy

$$P(\mathbf{x}) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j.$$

Definujme:

- $A$  je pozitivně definitní (SPD), pokud  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
- $A$  je negativně definitní (SND), pokud  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
- $A$  je pozitivně semidefinitní (PSD), pokud  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ .
- $A$  je negativně semidefinitní (NSD), pokud  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$ .
- $A$  je indefinitní (ID) jinak:  $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0, \mathbf{y}^T A \mathbf{y} > 0$ .

Typ matice lze efektivně rozpoznat řadou kritérií.

Zaměřme se na pozitivně definitní matice, zkuste si rozmyslet odlišnosti pro negativně def. a semidef.

Šest ekvivalentních definic pozitivní definitnosti:

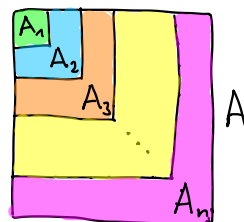
①  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

② Vlastní čísla  $\lambda_i > 0$ .

③ Determinanty principiálních minorů jsou kladné:

$$\det(A_1) > 0, \dots, \det(A_n) > 0.$$

Principiální minor  $A_k$  je podmatice  $k \times k$  v levém horním rohu.



④ Gaussovu eliminaci lze provést bez prohození a násobení řádků a má všechny pivoty  $\phi_i > 0$ .

⑤ Existuje regulární matice  $R$ , že  $A = R^T R$ .

⑥  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$  je skalární součin a  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}$  je norma.

70) Dokažme co nejvíc implikací:

① ⇔ ⑥) Dokázáno ve 2. cvičení.

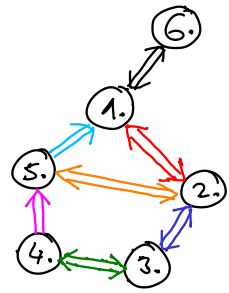
① ⇒ ②)

že symetrie jsou všechna vlastní čísla a vektory reálné. Pokud  $Ax = \lambda x$ , potom

$$\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x} > 0, \text{ neboť } A \text{ je SPD}$$

$$> 0, \text{ neboť } \|x\|^2$$

Proto  $\lambda > 0$ . □



① ⇐ ②)

že symetrie existuje spektrální rozklad  $A = Q \Lambda Q^T$ .

Nechť  $q_1, \dots, q_n$  je ortogonální báze z vlastních vektorů.

Pokud  $x = \sum d_i q_i$ , potom:

$$x^T A x = (\sum d_i q_i)^T A (\sum d_j q_j) = \sum_{i,j} d_i d_j q_i^T A q_j = \sum_{i,j} \lambda_j d_i d_j q_i^T q_j =$$

$$= \sum_i \lambda_i d_i^2 q_i^T q_i = \sum_i \lambda_i d_i^2 > 0.$$

z ortogonality 0 pro  $i \neq j$

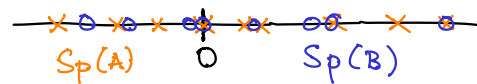
> 0 z předpokladu  $\geq 0$  a alespoň jedno kladné □

Věta (o proplétání vlastních čísel)

Nechť  $A$  je symetrická a  $B$  vznikne z  $A$  vyškrtnutím  $i$ -tého řádku a sloupce. Nechť  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  jsou vlastní čísla  $A$  a  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  vlastní čísla  $B$ . Potom:



$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}$$



Důkaz přístě, teď aplikujme.

② ⇒ ③)

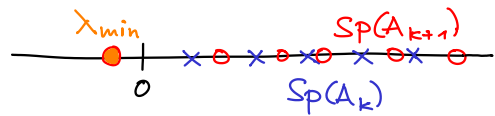
Podle věty o proplétání jsou vlastní čísla všech minorů  $A_k$  mezi  $\lambda_1$  a  $\lambda_n$ , tedy jsou kladná. Proto  $\det(A_k) > 0$ . □

② ⇐ ③)

Postupujme indukcí. Protože  $\det(A_1) > 0$ , je vlastní číslo

kladné. Pokud  $A_k$  má kladná vlastní čísla,  $A_{k+1}$  by mohlo

mít podle věty o proplétání nejvýše jedno nekladné vlastní číslo  $\lambda_{min}$ . Potom by však



$\det(A_{k+1}) \leq 0$ , což je spor. □

③  $\Rightarrow$  ④

Protože  $\det(A_k) > 0$ , jsou podmatice  $A_1, \dots, A_n$  regulární. Proto lze provádět Gaussovu eliminaci bez proházování řádků. Úpravy nemění determinant, tedy  $\det(A_k) = \prod_{i=1}^k p_i$ . Proto

$$p_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} > 0.$$

③  $\Leftarrow$  ④

Gaussova eliminace nemění determinant žádné podmatice  $A_k$ , tedy  $\det(A_k) = \prod_{i=1}^k p_i > 0$ . □

④  $\Rightarrow$  ⑤

Lze získat přímo, ale uvažme LDU dekompozici:

$$A = \underset{\substack{\text{matice úprav} \\ \downarrow}}{L} \underset{\substack{\text{kladná} \\ \text{diagonála} \\ \text{s pivoty } p_i}}{D} \underset{\substack{\text{odstupňovaný tvar} \\ \uparrow}}{U} = U^T D U.$$

↑  
ze symetrie

Protože  $\exists \sqrt{D}$  s diagonálou  $\sqrt{p_i}$ , položíme  $R = \sqrt{D} U$ .  $A = R^T R$ , navíc  $R$  je  $\blacksquare$  a  $R^T R$  se nazývá Choleského rozklad. □

⑤  $\Rightarrow$  ①

Dosadíme  $R^T R$  za  $A$ :

$$x^T A x = x^T R^T R x = (R x)^T (R x) = \|R x\|^2 = \|x\|_A^2 > 0.$$

Kvadratická forma s pozitivně definitní maticí určuje čtverec nějaké normy. □

②  $\Rightarrow$  ⑤

Uvažme spektrální rozklad  $A = Q \Lambda Q^T$ . Protože  $\Lambda$  má kladnou

72 diagonálu, existuje  $\sqrt{A}$  s diagonálou  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ .

Potom  $R = \sqrt{A} Q^T$  a  $A = R^T R$ . □

②  $\Leftarrow$  ⑤

Nechť  $Ax = \lambda x$ , potom  $\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\|R x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|x\|_A^2}{\|x\|^2} > 0$ ,

neboť je to podíl čtverců norem. □

Proč jsou pozitivně definitní matice tak důležité?

Dva dobré důvody:

① Propojují celou lineární algebru. Proto mají speciální vlastnosti a řada problému je pro ně mnohem jednodušších ( $Ax = b$ ,  $Ax = \lambda x$ ).

② Pozitivně definitní matice se často objevují.  
Ve statistice kovarianční matice lineárních závislostí.  
Ve fyzice se používají k modelování energie.  
Například systém pružin z 9. cvičení má potenciální energii  $x^T L_G x = \sum_{i,j \in E} (x_i - x_j)^2$ .

Věta: Nechť  $A$  je pozitivně definitní. Potom

$$x \text{ minimalizuje } x^T A x - x^T b \iff Ax = b.$$

minimalizace energie  $\nearrow$  za podmínek  $\nearrow$

Na tomto je právě založen Tuteho postup.

## Sylvestrova věta o setrvačnosti a minimaxová věta

Chceme pochopit strukturu libovolné kvadratické formy  $x^T A x$ . To je snadné pro  $A$  diagonální:  $\sum a_{ii} x_i^2$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad x^T A x = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 = \\ = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 = y^T \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 3/2 \end{pmatrix} y.$$

Tedy  $A$  je SPD.

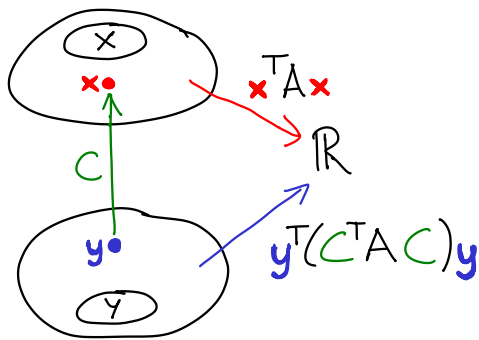
↑ Vhodnou substitucí jsme získali diagonální formu.

Substituce, aneb přechod do jiné báze

Nechť  $x = Cy$ , kde  $C$  je regulární matice.

$$x^T A x = (Cy)^T A (Cy) = y^T (C^T A C) y.$$

Tedy  $A$  a  $C^T A C$  reprezentují stejně kvadratické formy vůči různým bázím.



Def:  $A$  je kongruentní s  $B$ , značeno

$A \sim B$ , pokud  $\exists C$  regulární:

$$B = C^T A C.$$

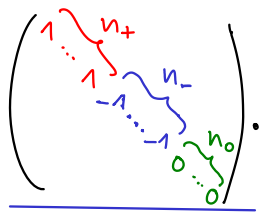
Obdoba podobnosti:  $B = S^{-1} A S$ .

Kongruence má třídy ekvivalence, které odpovídají rozdílným kvadratickým formám. Elegantně je charakterizuje Sylvestrova věta o setrvačnosti:

Věta:  $A \sim B$ , právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

↑ Tyto tři počty jsou signatura matice  $(n_+, n_-, n_0)$ .

74 Důkaz: Nejprve dokažme, že pokud  $A$  a  $B$  mají stejnou signaturu  $(n_+, n_-, n_0)$ , potom jsou kongruentní. Stačí ukázat, že  $A \sim D$ , kde  $D$  je diagonální matice



Protože  $A$  je symetrická matice, existuje spektrální rozklad  $A = Q \Lambda Q^T$ , seřadíme nejprve pozitivní vl. čísla, pak negativní, pak nulová.

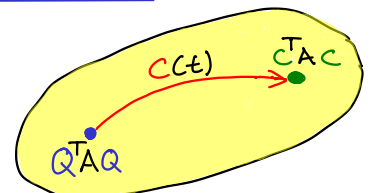
Zvolme diagonální  $(\sqrt{|\Lambda|})_{ii} = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_i|} & \lambda_i \neq 0, \\ 1 & \lambda_i = 0, \end{cases}$  potom  $\sqrt{|\Lambda|} D \sqrt{|\Lambda|}^T = \Lambda$ .

Tedy  $A = \underbrace{Q \sqrt{|\Lambda|}}_{C^T} D \underbrace{\sqrt{|\Lambda|}^T Q^T}_C$  a  $A \sim D$ .

Druhou implikaci dokážeme elegantním topologickým důkazem. Chceme ukázat, že  $A$  a  $C^T A C$  mají stejnou signaturu. Předpokládejme, že  $A$  je regulární, jinak aplikujme důkaz na  $A + \epsilon I$ , kde  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Nechť  $Q$  je ortogonální matice.

Potom  $A$  a  $Q^T A Q$  mají stejná vlastní čísla.  
 ← není spektrální rozklad  
 ← z podobnosti



trída kongruence

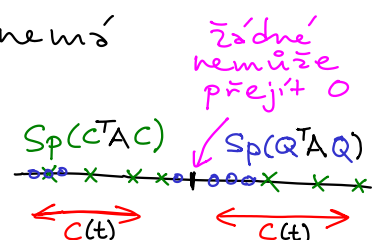
Nyní uvažme spojitou transformaci z  $Q^T A Q$  na  $C^T A C$ :

$$C(t) = \underbrace{t C + (1-t) Q}_{\text{konvexní kombinace}}, \quad t \in [0, 1], \quad \text{tedy } C(0) = Q, \quad C(1) = C.$$

Klíčové: vlastní čísla  $C(t)^T A C(t)$  se mění spojitě s  $t$ .

①. Předpokládejme, že  $C(t)$  je regulární  $\forall t \in [0, 1]$ .

Potom je i  $C(t)^T A C(t)$  regulární, tedy nemá žádné nulové vlastní číslo. Ze spojitosti vlastní čísla nemohou změnit znaménko, tedy  $A$  a  $C^T A C$  mají stejnou signaturu.



žádné  
nemůže  
přejít 0

② Musíme vhodně zvolit ortogonální Q.

Odvodíme z C, uvažme QR rozklad  $C = QR$ .

Víme, že R má kladnou diagonálu.

$$C(t) = tQR + (1-t)Q = Q(tR + (1-t)I).$$

regulární ↗

Konvexní kombinace dvou  
matric s kladnou diagonálou,  
má kladnou diagonálu a je  
regulární. □

Proto je C(t) regulární.

Pokud je A regulární, lze signaturu zjistit ze znamének pivotů:  $n_+$  je počet kladných,  $n_-$  počet záporných.

Kolik je tříd kongruence pro matice n x n? Snadným výpočtem je to  $\binom{n+2}{2}$ . ← počet voleb  $n_+, n_-$ , že  $n_+ + n_- \leq n$

Pro n=2 je jich 6, z minulého cvičení:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Geometrie tříd kongruence

Uvažme symetrické matice 2x2:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ,

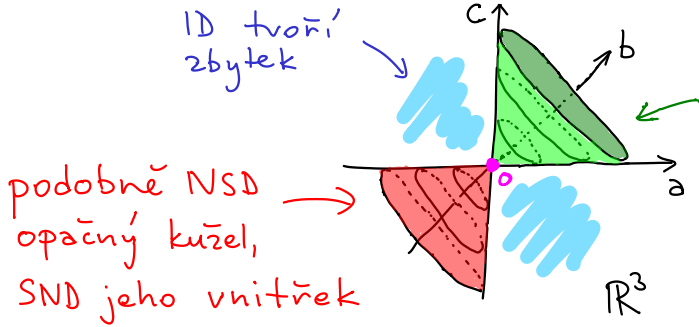
můžeme reprezentovat body (a,b,c) v  $\mathbb{R}^3$ .

Jak geometricky vypadá množina SPD matic?

- ①  $a > 0, c > 0$ , ②  $\det(A) = ac - b^2 > 0$ .

určuje čtvrtprostor

lze udělat geometrické odvození, které vynecháme



PSD tvoří kužel, SPD jeho vnitřek

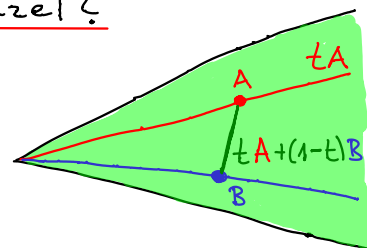
podobně NSD opačný kužel, SND jeho vnitřek

Podobně pro větší n, akorát těžké na představu.

76 Proč pozitivně definitní matice tvoří kužel?

Lemmas: Necht'  $A, B$  jsou SPD. Potom

- (i)  $tA$  je SPD pro libovolné  $t > 0$ ,
- (ii)  $tA + (1-t)B$  je SPD, kde  $t \in [0, 1]$ .



Množina SPD matic je konvexní a uzavřená na paprsky, PSD podobně. Důkaz je snadný přímo z definice.

Rayleyho kvocienty

Mějme symetrickou matici  $A$  s vlastními čísly

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  a vlastními vektory  $y_1, \dots, y_n$ .

← ortonormální báze

Potom  $\lambda_i = y_i^T A y_i$ . Označme  $R_A(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$ , kde  $x \neq 0$ .

Rayleyho kvocient ↑  
chování kvadratické

← pouze normování

formy na jednotkové sféře

Necht'  $x = \sum \alpha_i y_i$ , potom

$$R_A(x) = \frac{\sum \alpha_i^2 \lambda_i y_i^T y_i}{\sum \alpha_i^2 y_i^T y_i} = \frac{\sum \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum \alpha_i^2}$$

Pozorování:  $\max_{x \neq 0} R_A(x) = \lambda_1$ ,  $\min_{x \neq 0} R_A(x) = \lambda_n$ .

Důkaz: Necht'  $\|x\|=1$ , tedy  $|\alpha_i| \leq 1$  a  $\sum \alpha_i^2 = 1$ . Potom je  $\sum \alpha_i^2 \lambda_i$  maximalizována pro  $\alpha_1=1$ , minimalizována pro  $\alpha_n=1$ . □

Courant-Fischerova minimaxová věta.

Každé vlastní číslo  $\lambda_k$  lze popsat podobně:

Věta: Necht'  $A$  je symetrická matice. Potom

$$\lambda_k = \max_{\substack{U_k \\ \dim(U_k)=k}} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in U_k}} R_A(x) = \min_{\substack{V_k \\ \dim(V_k)=n-k+1}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in V_k}} R_A(x)$$

Důkaz: Zaměřme se pouze na první rovnost, druhá se dokáže analogicky.

" $\geq \lambda_k$ ": Zvolme  $U_k = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$ , zbytek jako v důkazu pozorování, s minimalizací.



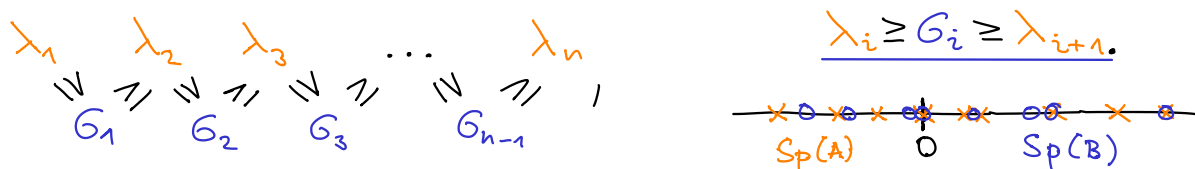
" $\leq \lambda_k$ ": Necht'  $U_k$  je libovolný podprostor dimenze  $k$ . □  
 Zvolme  $V_k = \langle y_k, \dots, y_n \rangle$  dimenze  $n-k+1$ . Proto  $\exists x \neq 0$ ,  
 že  $x \in U_k \cap V_k$ . Proto minimum v  $U_k$  je menší či rovno  
 $R_A(x)$ . Na druhou stranu pro  $V_k$  víme jako v pozorování,  
 že  $R_A(x) \leq \lambda_k$ . □

Poznámka: V důkazu věty využíváme, že volba  $U_k/V_k$   
 je vlastní podprostor (uzavřen na obrazy v  $A$ ). Proto  
 $A|_{U_k}$  a  $A|_{V_k}$  jsou symetrické matice a platí pozorování.

Tato věta má spíše teoretické důsledky, ne přímo  
 určena k počítání. Ukažme jeden z nich:

Věta (o proplétání vlastních čísel)

Necht'  $A$  je symetrická a  $B$  vznikne z  $A$  vyškrtnutím  
 $i$ -tého řádku a sloupce. Necht'  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  jsou vlastní  
 čísla  $A$  a  $G_1 \geq \dots \geq G_{n-1}$  vlastní čísla  $B$ . Potom:



Důkaz: Bez újmy na obecnosti, necht'  $i = n$ , tedy v  
 $B$  je vyškrtnutý poslední řádek a sloupec. Potom

$R_B(y) = R_A\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ . Necht'  $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ .

- Protože  $U_k$  volíme pro  $B$  na podprostoru  $W$ , zjevně  
 $\lambda_k \geq G_k$ .
- Na druhou stranu necht'  $U_{k+1}$  definuje  $\lambda_{k+1}$  z věty.  
 Proto  $U_k = U_{k+1} \cap W$  je dimenze alespoň  $k$ , tedy

$$G_k \geq \min_{\substack{y \neq 0 \\ y \in U_k}} R_A(y) \geq \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in U_{k+1}}} R_A(x) = \lambda_{k+1}.$$

□

## 78 Pozitivně definitní matice a elipsoidy.

Nechť  $A$  je pozitivně definitní matice, uvažme množinu

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A x = 1\}.$$

Pokud  $A = I_n$ , splňuje  $\sum x_i^2 = 1$   $n$ -rozměrná jednotková sféra  $S$ .

V případě diagonální matice  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  je to elipsoid s osami o délce  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$  ve směru os kanonické báze.

A jak  $S$  vypadá obecně?

Uvažme spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^T,$$

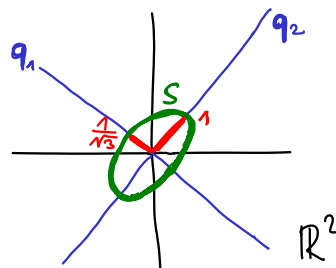
tedy  $x^T A x = 1$ , pokud  $(Q^T x) \Lambda (Q^T x) = 1$ .

Nechť  $q_1, \dots, q_n$  jsou vlastní vektory a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vlastní čísla.

Potom  $S$  je elipsoid ve směru vlastních vektorů o délkách  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$  (což je kladné z pozitivní definitnosti).

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$
$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Připomeňme ze 2. cvičení, že pozitivně definitní matice tvoří normu udanou těmito elipsoidy.

## Literatura

### Pavel Klavík: Povídání o lineární algebře

Pokrývá zimní semestr, pojmy jako vektorový prostor, matice, lineární zobrazení.

[http://pavel.klavik.cz/vyuka/texty/povidani\\_o\\_la.html](http://pavel.klavik.cz/vyuka/texty/povidani_o_la.html)

### Pavel Klavík: Přednáška Lineární algebra III

Navazující text, obsahuje například dekompozici podle singulárních hodnot, úvod do numerické lineární algebry, algoritmy na výpočet vlastních čísel.

<http://pavel.klavik.cz/vyuka/texty/la3.html>

### Gilbert Strang: Linear Algebra and Its Applications

Skvělá úvodní kniha k lineární algebře, máda věci je na pokročilém cvičení z ní inspirována.

### James Demmel: Applied Numerical Linear Algebra

Kniha o praktickém počítání v lineární algebře, o vlivu zaokrouhlování a aplikacích.