8 Normy mimo normu (30 bodů)

Na cvičeních jsme charakterizovali všechny skalární součiny $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$ pomocí symetrických pozitivně definitních matic A jako $\boldsymbol{x}^\mathsf{T} A\boldsymbol{y}$. Také jsme zmínili, že každý skalární součin $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$ indukuje normu $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle}$. Norem je však mnohem více než skalárních součinů, neboť ne každá norma je spojena se skalárním součinem. V této úloze dokážeme úplnou charakterizaci norem v $\mathbb{R}^n$.

8.1 Definice normy

Připomeňme si nejprve definici normy. Norma $\|\cdot\|$ je zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které splňuje tři podmínky:

(i) *Nezápornost:* pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ a pro $\boldsymbol{x} \neq 0$ dokonce $\|\boldsymbol{x}\| > 0$.
(ii) *Linearita:* pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$.
(iii) *Trojúhelníková nerovnost:* pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí, že $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Příklady norem jsou standardní norma

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{x},$$

A-norma $\|\boldsymbol{x}\|_A = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} A\boldsymbol{x}$ (kde A je symetrická pozitivně definitní matice) a ℓ_p norma

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

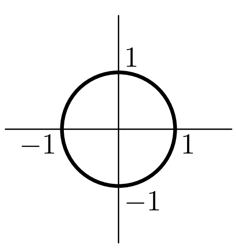
pro $p \in [1, \infty]$.

8.2 Sféry a koule

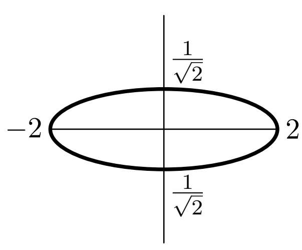
Mějme normu $\|\cdot\|$. Zaveďme následující značení:

$$S_r = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| = r\right\}, \qquad B_r = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| \leq r\right\}.$$

Množina S_r je sféra o poloměru r, a B_r je koule o poloměru r. Na obrázku jsou sféry S_1 pro různé normy.

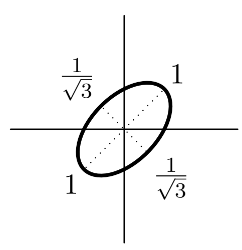


standardní norma



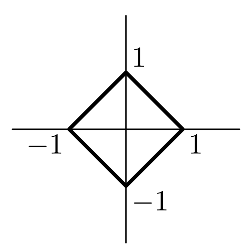
A norma

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \\ & 2 \end{pmatrix}$

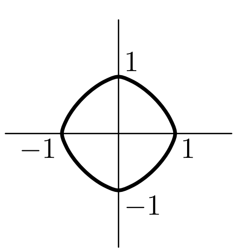


A norma

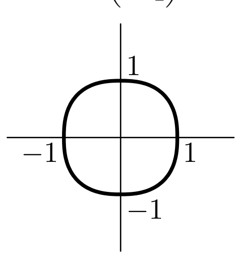
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



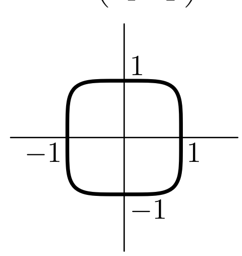
ℓ_1 norma



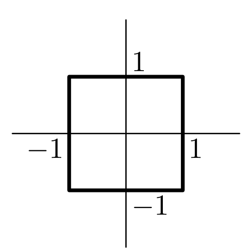
$\ell_{3/2}$ norma



$\ell_{5/2}$ norma



ℓ_5 norma



ℓ_∞ norma

Pokud zvolíme normu libovolného vektoru $\|\boldsymbol{x}\|$, vyplývá z linearity (i) také norma všech jeho násobků, tedy určili jsme normu pro celou přímku procházející počátkem. Pokud předepíšeme normu na každé z těchto přímek, je celá norma určená, ale musíme to udělat konzistentně, aby byla splněna trojúhelníková nerovnost. Jinými slovy norma je jednoznačně určena její jednotkovou sférou S_1.

Udělejme malou odbočku. Množina M se nazývá *konvexní*, pokud pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ patří úsečka $\big\{t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y} : t \in [0,1]\big\}$ do množiny M. Popišme paralelu s vektorovými podprostory. Vektorový podprostor je množina vektorů uzavřená na lineární kombinace. Pro konvexní množiny platí, že jsou uzavřené na konvexní kombinace. To jsou lineární kombinace $t_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + t_k\boldsymbol{x}_k$, které navíc splňují, že $t_1 + \cdots + t_k = 1$ a $t_i \geq 0$.

Úloha 8.1. Dokažte následující vlastnosti pro libovolnou normu $\|\cdot\|$:

(a) Počátek $\mathbf{0} \notin S_r$ pro libovolné $r > 0$.
(b) Množiny S_r a B_r jsou symetrické podle počátku, tedy $-S_r = S_r$ a $-B_r = B_r$.
(c) Množina B_r je konvexní.

Nyní přeformulujme vlastnost, že B_r je konvexní.

Úloha 8.2. Nechť $\|\cdot\|$ je libovolné zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které splňuje (i) a (ii). Dokažte, že B_r je konvexní pro libovolné $r > 0$, právě když

$$\|t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}\| \leq t\|\boldsymbol{x}\| + (1-t)\|\boldsymbol{y}\|,$$

kdykoliv $t \in [0,1]$.

8.3 Charakterizace všech norem

Nyní si ukážeme charakterizaci norem. Již víme, že každá norma definuje koule B_r, které jsou konvexní a symetrické podle počátku. Naopak libovolná jedna taková koule již jednoznačně určuje normu:

Úloha 8.3. Nechť B_1 je uzavřená omezená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, symetrická podle počátku. Nechť S_1 je hranice B_1 a nechť $\mathbf{0} \notin S_1$. Definujme zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ následovně:

$$\|\boldsymbol{x}\| = |\alpha|, \qquad \text{kde } \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y} \text{ a } \boldsymbol{y} \in S_1.$$

Dokažte, že $\|\cdot\|$ je norma.

Nápověda. Je snadné ověřit, že $\|\cdot\|$ splňuje vlastnosti (i) a (ii). S využitím úlohy 8.2, vhodným dosazením za t, lze získat trojúhelníkovou nerovnost (iii).

Ukázali jsme, že normy mohou být oproti skalárním součinům velice složité. Zakončeme tuto úlohu příkladem několika „divných“ norem, které nejdou popsat žádným ze vzorečků na začátku zadání úlohy.