# 9 Determinant je multilineární alternující forma (40 bodů)

Těmito slovy by vám algebraik pravděpodobně popsal determinant. Definice je na jednu stranu krátká a jednoduchá, na druhou stranu člověku neznalému těchto pojmů neřekne absolutně nic. Naším cílem v této úloze bude si tuto alternativní definici představit a ukázat ekvivalenci s typickou definicí determinantu pomocí formule

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}. \qquad (\clubsuit)$$

Z formule vyvodíme (s trochou práce) vlastnosti determinantu, pomocí kterých ho můžeme spočítat. Na druhou stranu vůbec není vidět, kde se tato formule vzala a proč zrovna takhle je zajímavá; což bude mnohem zřejmější z algebraického přístupu pomocí multilineárních forem.

Jednotlivé vlastnosti si proto budeme ilustrovat na maticích $2 \times 2$, kde můžeme snadno zkontrolovat, že je determinant definovaný ($\clubsuit$) splňuje:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

## 9.1 Definice determinantu pomocí vlastností

Zkusíme determinant nadefinovat pomocí vlastností, které splňuje. Pro jednoduchost budeme pracovat nad tělesem reálných čísel.[1] Determinant det je libovolné zobrazení

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R},$$

které splňuje následující tři vlastnosti. Tedy determinant přiřazuje čtvercovým maticím reálná čísla. Formálně máme jednu definici determinantu pro každou velikost čtvercové matice, což budeme ignorovat. Tři vlastnosti jsou tyto:

(1) Determinant je lineárně závislý na prvním řádku matice:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \gamma \cdot a & \gamma \cdot b \\ c & d \end{vmatrix} = \gamma \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Tedy násobky řádků můžeme z determinantu vytknout a podobně můžeme rozdělením řádku rozdělit jeden determinant na součet dvou determinantů. Pozor, rozhodně z toho nevyplývá, že $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$, můžeme aplikovat pouze na jeden řádek naráz. Této vlastnosti se říká *linearita prvního řádku* a drobnou úpravou (1) na (1') dostaneme slibovanou *multilinearitu*.

(2) Determinant je *alternující*; prohození dvou řádků matice změní znaménko determinantu.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(3) Determinant jednotkové matice $\det(I_n)$ je roven jedné.

$$\begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \dots$$

Podle vlastností (1) a (2) je determinant překvapivě určený jednoznačně až na přeškálování. Poslední vlastnost fixuje hodnotu determinantu nějaké matice.

[1] Definici determinantu lze samozřejmě zobecnit i pro ostatní tělesa. Jediný rozdíl je, že nad tělesem charakteristiky dva (např. $\mathbb{Z}_2$) se uvažuje místo vlastnosti (2) vlastnost (4).

V případě našeho odvození se ukazují dvě potíže algebraického přístupu. Předně ani nevíme, jestli existuje nějaké funkce splňující vlastnosti (1) až (3) (což víme podle znalosti formule (♣), kterou však nebudeme chtít používat). Také zatím nevíme, zda je determinant určený jednoznačně.

## 9.2 Odvození dalších vlastností

Začneme tím, že z vlastností (1) až (3) odvodíme další základní vlastnosti determinantu.

**Úloha 9.1.** Dokažte následující vlastnosti (1') a (4) až (10).

*Poznámka.* V jejich důkazu nemůžete používat nic jiného než vlastností (1) až (3) a vlastností již dokázaných. Pokud se nepodaří některou vlastnost dokázat, můžete ji přeskočit a dále používat (čímž pochopitelně dostanete méně bodů).

(1') První řádek není v ničem speciální, determinant je lineárně závislý na libovolném řádku matice. Této vlastnosti se říká *multilinearita*.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ \gamma \cdot c & \gamma \cdot d \end{vmatrix} = \gamma \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(4) Pokud má determinant nulový řádek, je roven nule.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

(5) Pokud má determinant dva řádky stejné, je roven nule.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

(6) Přičtení libovolného násobku jednoho řádku k jinému nemění determinant.

$$\begin{vmatrix} a+\gamma \cdot c & b+\gamma \cdot d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(7) Determinant trojúhelníkové matice $T$ (horní či dolní) je roven součinu prvků na hlavní diagonále; $\det(T) = t_{1,1} \cdot t_{2,2} \cdots t_{n,n}$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad.$$

(8) Determinant umožňuje testovat regularitu. Je nenulový právě tehdy, když je matice regulární.

*Nápověda.* Aplikujte Gaussovu eliminaci, která nemění determinant (nebo alespoň nemění nenulovost). Jak dopadne, pokud je matice regulární? Jaký výsledek dostaneme pro singulární matici?

*Poznámka.* Z výše uvedených vlastností již vyplývá jednoznačnost determinantu. Totiž aplikováním Gaussovy eliminace získáme, že determinant je (až na znaménko) součin pivotů. Pro daný postup Gaussovy eliminace proto vždy získáme stejné číslo a determinant musí být určený jednoznačně. Protože však Gaussovu eliminaci můžeme provádět různým způsobem, není jasné, zda vždy dostaneme stejné číslo, a tedy jestli je determinant vůbec *dobře zadefinovaný*. Mohlo by se ještě stát, že nebude existovat žádná funkce splňující vlastnosti (1) až (3).

(9) Determinant součinu dvou matic je součin jejich determinantů, tedy platí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) =$$
$$= (ad-bc)(eh-fg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

*Nápověda.* Lze například postupovat následujícím trikem. Případ, kdy je $B$ singulární, vyřešíme zvlášť. Pokud je $B$ regulární, definujme zobrazení $d$:

$$d(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

Potřebujeme pouze dokázat, že zobrazení $d$ splňuje vlastnosti (1) až (3). Potom z jednoznačnosti determinantu dostaneme, že $d = \det$ (a teoreticky by ani jedna z funkcí nemusela vůbec existovat).

Matice $P_\pi$ je permutační (odvozená od permutace $\pi$), pokud má v každém řádku a sloupci obsahuje právě jednu jedničku a na ostatních pozicích nuly; podrobněji v úloze 2 z první série.

**Úloha 9.2.** Jak vypadá determinant permutační matice $P_\pi$? Zkuste dokázat jak pomocí vlastností, tak pomocí definice (♣).

Zbývá ukázat poslední vlastnost (10) a tím bude náš seznam vlastností úplný.

(10) Determinant matice i její transpozice je stejný, tedy $\det A = \det A^\mathsf{T}$.

*Nápověda.* Problém je, že všechny předchozí vlastnosti determinantu hovoří o řádcích matice. Důkaz však lze založit na LDU dekompozici, kterou jsme si ukazovali na cvičení. Singulární případ $A$ vyřešíme zvlášť. Pro každou regulární matici $A$ platí

$$PA = LDU,$$

kde $P$ je vhodná permutační matice, $L$ je dolní a $U$ je horní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou a $D$ je diagonální matice obsahující pivoty. Důkaz se provede aplikováním transpozice na LDU dekompozici a porovnáním determinantů.

Poslední vlastnost (10) prakticky zdvojuje seznam vlastností, které o determinantu známe. Získáváme podobné vlastnosti o sloupečcích matice: Determinant je lineárně závislý na libovolném sloupečku; pokud je libovolný sloupeček nulový nebo jsou dva sloupečky stejné, je determinant nulový; ...

## 9.3 Ekvivalence s definicí pomocí formule (♣)

Zbývá dokázat, že determinant definovaný vlastnostmi (1) až (3) splňuje formuli (♣).

**Úloha 9.3.** Dokažte, že determinant definovaný (1) až (3) je ekvivalentní s definicí (♣).

*Nápověda.* Rozdělíme výpočet jednoho determinantu na výpočet $n^n$ determinantů. Podle vlastnosti (1) rozdělíme determinant na $n$ determinantů, každý z nich obsahuje pouze jedno číslo z prvního řádku a na zbývajících pozicích nuly:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Stejně tak rozdělíme i ostatní řádky, každý na $n$ dalších determinantů:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}.$$

Tak získáme $n^n$ matic (každá obsahuje právě jeden koeficient původní matice v každém řádku), jejichž determinanty budou triviální. Část z nich bude nulových a ty zbývající budou členy sumy (♣). Například pro výše uvedený determinant dostáváme

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 + ad - bc + 0 = ad - bc.$$

## 10 Hadamardovy matice dají nejvíce! (30 bodů)

V této úloze se budeme zabývat speciálními čtvercovými maticemi, které se nazývají Hadamardovy. Mají překvapivě zajímavou kombinatorickou strukturu a používají se například v teorii samoopravných kódu nebo ve statistice. Jeden ze základních otevřených problémů je, pro které velikosti vůbec existují. Ukážeme si konstrukci pro velikosti ve tvaru $2^k$ a také překvapivou souvislost Hadamardových matic s determinantem.

**Definice.** Matice $H \in \{-1, 1\}^{n \times n}$ se nazývá *Hadamardova*, pokud platí

$$HH^\mathsf{T} = H^\mathsf{T}H = nI_n.$$

Tedy Hadamardova matice je tvořená $\pm 1$ a má ortogonální řádky a sloupce.

Například Hadamardova matice řádu dva vypadá takto: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Nejprve vypozorujme:

**Úloha 10.1.** Nechť $H$ je Hadamardova matice $n \times n$. Potom $n = 1, 2$ nebo je dělitelné čtyřmi.

*Nápověda.* Nejprve zkuste dokázat dělitelnost dvěma (s výjimkou $n = 1$). Pokud $H$ je Hadamardova matice, můžeme s ní provádět určité úpravy, které „hadamardovost“ zachovávají.

Základní hypotéza Hadamardových matic říká, že Hadamardova matice existuje pro každé $n = 4k$. Je známo pouze několik různých konstrukcí, z nichž dostaneme Hadamardovy matice pouze pro některé řády.[2] Ukážeme si Sylvesterovu konstrukci pro $n = 2^k$. Pokud vymyslíte či nastudujete nějakou jinou konstrukci a naučíte mě ji, můžete dostat bonusové body.

**Úloha 10.2.** Dokažte, že existuje Hadamardova matice $H_n$ velikosti $n \times n$ pro každé $n = 2^k$.

*Nápověda.* Zkuste objevit induktivní konstrukci, která vytvoří $H_{2n}$ nějakým způsobem z matice $H_n$. Také můžete využít Kroneckerův součin matic, který se definuje takto: Nechť $A$ je matice $m \times n$ a $B$ je matice $p \times q$. Kroneckerův součin $A \otimes B$ je matice $mp \times nq$ tvořená $m \times n$ bloky velikosti $p \times q$ tak, že blok na souřadnicích $(i, j)$ je matice $a_{i,j}B$. Jestliže $A$ a $B$ jsou Hadamardovy matice, jak vypadá $A \otimes B$? Příklad součinu $A \otimes B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{potom} \qquad A \otimes B = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & & 2 & & 3 & \\ 2 & -1 & 4 & -2 & 6 & -3 \\ \hline 4 & & 5 & & 6 & \\ 8 & -4 & 10 & -5 & 12 & -6 \end{array}\right).$$

Na závěr dokažme, že Hadamardovy matice jsou extremální matice pro následující větu. Objevil ji sám Hadamard v roce 1893, čímž započal zkoumání Hadamardových matic.

**Úloha 10.3.** Mějme matici $A$ velikosti $n \times n$, že $|a_{i,j}| \leq 1$ ve všech pozicích $(i, j)$. Potom platí $|\det(A)| \leq n^{n/2}$ a rovnosti se nabývá právě tehdy, když $A$ je Hadamardova matice.

*Nápověda.* Využijte toho, že absolutní hodnota determinantu odpovídá objemu rovnoběžnostěnu určeného řádky matice. Pokud máme rovnoběžnostěn určený vektory $\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(n)}$, jaký je jeho maximální objem v závislosti na normách $\|\mathbf{x}_{(1)}\|, \ldots, \|\mathbf{x}_{(n)}\|$? A kdy se tohoto maxima přesně nabývá?

[2] Otevřené řády do dvou tisíc jsou 668, 716, 892, 1004, 1132, 1244, 1388, 1436, 1676, 1772, 1916, 1948 a 1964. Například matice řádu 428 byla zkonstruována teprve nedávno, v IPM v Tehránu v roce 2005.