

Tyto příklady mohou posloužit k přípravě na písemku a lze za ně získat až 70 bodů.

## 1 Limity posloupností (20 bodů)

Nalezněte limity následujících posloupností nebo dokažte, že neexistují:

(a) (5 bodů)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n - 3)^{20}(3n + 7)^{30}}{(2n + 2)^{50}}.$$

(b) (5 bodů)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}.$$

(c) (5 bodů)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^5 + n!}{3^n + n^n}.$$

(d) (5 bodů) Limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  rekurentně popsané posloupnosti

$$a_1 = c \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}.$$

## 2 Řady (15 bodů)

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) (5 bodů)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3 + n^5}{(n - 100\sqrt{n})^{3n}}.$$

(b) (5 bodů)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2 + 7} - \sqrt[3]{n^2 + 2}.$$

(c) (5 bodů)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - 1000\sqrt[3]{n^2 + 1}}.$$

## 3 Limity funkcí (20 bodů)

Nalezněte limity následujících funkcí nebo dokažte, že neexistují:

(a) (5 bodů)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

(b) (5 bodů)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{x}.$$

(c) (5 bodů)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} \cdot \frac{\log \cos x}{x^2}.$$

(d) (5 bodů)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{\sqrt{n^3 - 7n^2}}.$$

## 4 Derivace (15 bodů)

Nalezněte derivace následujících funkcí ve všech možných bodech:

(a) (5 bodů) Funkce

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}.$$

(b) (10 bodů) Funkce  $f$  daná předpisem

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(0) = 0.$$

Je  $f'$  spojitá ve všech bodech?